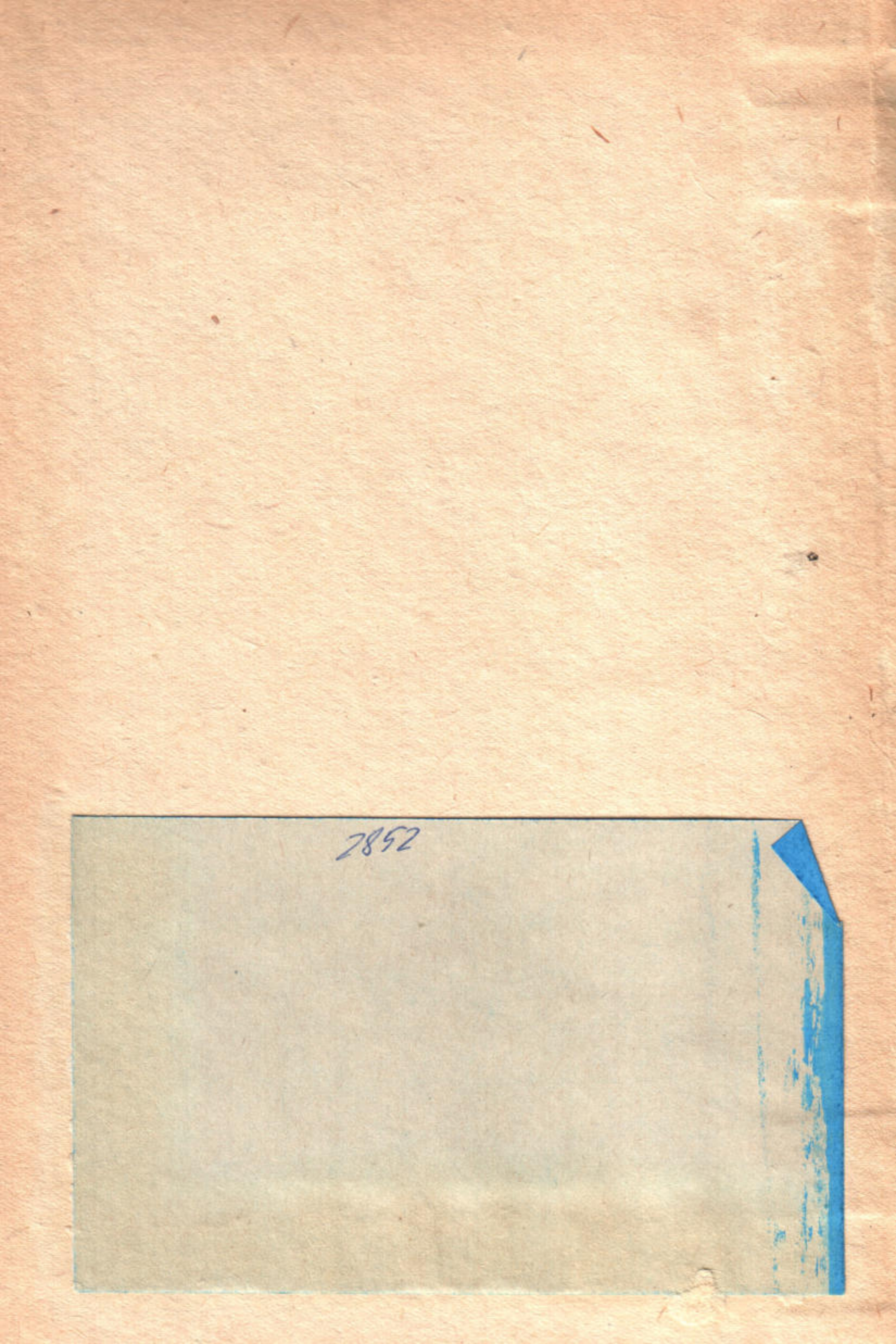
Суслов

Основы аналитич. механики


2852

G. SOUSLOW,
professeur à l'Université de Kieff.

Traité de mécanique rationnelle.

ОСНОВЫ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Г. К. СУСЛОВА,
профессора университета Св. Владиміра.

Томъ I.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

ДИНАМИКА ТОЧКИ.

ИЗДАНІЕ ВТОРОЕ.



ИЗДАНІЕ КНИГОПРОДАВЦА Н. Я. ОГЛОБЛИНА
Кіевъ, Крещатикъ № 33. || С.-Петербургъ, Екатерин. № 4.
Кіевъ. 1911.

Вторая часть перваго тома моихъ „Основъ аналитической механики“ издана въ той же формѣ, какъ и первая. Содержаніе второй части составляетъ динамика точки; третья часть, въ которую войдутъ геометрія массъ, общія положенія динамики системы и статика, появится въ свѣтъ въ самомъ непродолжительномъ времени.

Проф. *Г. Сусловъ.*

Кіевъ. Мартъ 1911.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

§§ Стр.

ДИНАМИКА.

ГЛАВА VIII.

Основные законы движенія (Axiomata sive leges motus).

ДИНАМИКА ТОЧКИ.

ГЛАВА IX.

Матеріальная точка. Дифференціальныя уравненія движенія точки. Ихъ интегралы.

ГЛАВА X.

Прямолинейное движеніе свободной матеріальной точки.

§§ Стр.

ГЛАВА XI.

Простѣйшие случаи прямолинейнаго движенiя свободной матерiальной точки.

ГЛАВА XII.

Законъ моментовъ количества движенiя. Законъ живой силы.

ГЛАВА XIII.

Центральныя орбиты.

ГЛАВА XIV.

Дифференцiальныя уравненiя движенiя несвободной точки.

ГЛАВА XV.

Движеніе точки по поверхности.

ГЛАВА XVI.

Движеніе точки по кривой.

ГЛАВА XVII.

Движеніе точки по связи съ треніемъ.

ГЛАВА XVIII.

Относительное движеніе матеріальной точки.

ГЛАВА XIX.

Мгновенныя силы. Ударъ точки о связь.

ДИНАМИКА.

ГЛАВА VIII.

Основные законы движенія.

(Axiomata sive leges motus).

85. Матерія. Масса. Плотность. Въ Кинематикѣ мы говорили о движеніи геометрическихъ объектовъ, теперь перейдемъ къ разсмотрѣнію движенія вещественныхъ или матеріальныхъ тѣлъ. Матерія—понятіе первоначальное и дальнѣйшему опредѣленію не подлежитъ; мы можемъ только описательно изложить качества матеріи. Прежде всего матерія представляетъ собою величину измѣримую; другими словами, количество матеріи въ какомъ либо тѣлѣ можетъ быть выражено числомъ. Затѣмъ матерія протяженна, т. е. занимаетъ нѣкоторый объемъ, имѣетъ длину, ширину и высоту. Далѣе она обладаетъ способностью двигаться. Поэтому, если часть матеріи исчезла изъ какого либо объема, то мы всегда можемъ допустить, что она перемѣстилась въ другое мѣсто, и никогда не имѣемъ достаточно данныхъ для утвержденія, что она уничтожилась,—отсюда заключаемъ о неразрушимости матеріи и о постоянствѣ ея количества въ мірѣ. Въ объемъ, сплошь заполненный матеріей, не можетъ быть помѣщено новое количество матеріи,—это свойство носитъ названіе непроницаемости.

Количество матеріи въ какомъ либо тѣлѣ называется его массою. За единицу массы принимается граммъ, одна тысячная часть массы эталона, хранящагося въ Парижѣ. При изготовленіи эталона*) „килограмма“ имѣли въ виду сдѣлать массу его

*) Le kilogramme prototype des Archives.

равною массѣ кубическаго десиметра воды при 4^0 Цельзія, но позднѣйшія измѣренія обнаружили, что эта цѣль не была достигнута: масса куб. дес. воды вѣситъ 1000,013 грамма.

Количество матеріи, заключенное въ единицѣ объема какого-нибудь тѣла, называется среднею плотностью тѣла. Всѣ тѣла измѣняютъ свой объемъ съ измѣненіемъ температуры; отсюда вытекаетъ, что видимый объемъ тѣла не сплошь заполненъ матеріей (тѣла скважны), а потому, если въ различныхъ частяхъ какого либо тѣла вырѣзать одинаковые объемы, то, вообще говоря, массы въ этихъ объемахъ будутъ различны. Возьмемъ какую либо точку A внутри объема, занятаго тѣломъ, и построимъ замкнутую поверхность S такъ, чтобы A лежала на этой поверхности или внутри ея. Пусть объемъ, ограниченный поверхностью S, будетъ Δv, а масса, заключенная въ этомъ объемѣ, Δm. Разсмотримъ предѣлъ отношенія $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ въ томъ предположеніи, что поверхность S стягивается въ точку A. Если этотъ предѣлъ σ существуетъ, то онъ называется плотностью тѣла въ точкѣ A:

$$\sigma = \text{Пред.} \left\{ \frac{\Delta m}{\Delta v} \right\}_{\Delta v = 0} .$$

Количество σ, вообще говоря, функція координатъ точки A; если для всѣхъ точекъ внутри тѣла σ равно одному и тому же постоянному, то тѣло называется однороднымъ. Единица плотности сложная; она зависитъ отъ единицъ массы и длины. Символомъ можно эту единицу изобразить такъ:

$$\text{ед. плотности} = \frac{\text{граммъ}}{(\text{сант.})^3} .$$

86. Количество движенія тѣла. Измѣненіе движенія (mutatio motus). Въ геометрическомъ смыслѣ матеріальное тѣло мы можемъ разсматривать какъ трехмѣрную деформирующуюся среду (§ 38). Поэтому движеніе данной массы можетъ быть крайне разнообразно. Въ настоящей главѣ мы будемъ говорить исключительно о простѣйшемъ возможномъ движеніи массы, а именно о томъ, когда масса движется поступательно (§ 58), подобно твердому тѣлу. Тогда всѣ точки массы имѣютъ одновременно одну и ту же скорость, одно и то же ускореніе. Общія всѣмъ точкамъ массы скорость и ускореніе мы будемъ въ дальнѣйшемъ называть для краткости скорость массы, ускореніе массы.

Пусть тѣло движется поступательно со скоростью v. Если масса тѣла m, то произведеніе mv называется количествомъ движенія тѣла. Количество движенія—векторъ, совпадающій по направленію со скоростью.

Геометрическая производная по времени отъ количества движенія носитъ названіе измѣненія движенія (mutatio motus, по Ньютону). Эта производная по величинѣ, очевидно, равняется произведенію изъ массы на ускореніе, а по направленію совпадаетъ съ ускореніемъ (§ 4, § 49).

Единицы количества движенія и измѣненія движенія такимъ образомъ зависятъ отъ основныхъ единицъ массы, длины и времени:

$$\text{ед. кол. движ.} = (\text{ед. массы}) \cdot (\text{ед. скор.}) = \frac{(\text{граммъ})\,(\text{сант.})}{\text{сек. сред. врем.}};$$

$$\text{ед. измѣн. дв.} = (\text{ед. массы}) \cdot (\text{ед. ускор.}) = \frac{(\text{граммъ})\,(\text{сант.})}{(\text{сек. сред. врем.})^2}.$$

87. Сила. Одно и то же тѣло можетъ двигаться самымъ разнообразнымъ способомъ. Поэтому извѣстный характеръ движенія тѣла считается случайнымъ качествомъ тѣла, зависящимъ не отъ самого тѣла, а отъ внѣшнихъ условій. Эти внѣшнія условія, заставляющія массу измѣнять свое движеніе, мы называемъ силами. Ввести силы въ анализъ мы можемъ не иначе, какъ съ помощью ряда заранѣе сдѣланныхъ условій или опредѣленій. Наиболѣе просто и строго изложены эти основныя опредѣленія подъ названіемъ axiomata sive leges motus Ньютономъ въ его „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687 г.). Всякія позднѣйшія попытки реформировать или измѣнить Ньютоновы положенія не могутъ быть признаны удачными. Поэтому въ дальнѣйшемъ мы будемъ держаться, какъ можно ближе, Ньютона, пользуясь лишь при изложеніи болѣе употребительными теперь терминами.

88. Первый законъ Ньютона. Прежде всего необходимо условиться о томъ признакѣ, по которому мы узнаемъ, что сила дѣйствуетъ на данную массу, или, какъ говорятъ, сила приложена къ данной массѣ. Простѣйшимъ изъ движеній тѣла, безспорно, служитъ движеніе прямолинейное и равномѣрное; скорость такого движенія постоянна по величинѣ и направленію, слѣд., ускореніе равно нулю. Частнымъ случаемъ равномѣрнаго движенія будетъ покой массы. Мы принимаемъ, что движеніе такого рода масса можетъ совершать сама по себѣ, безъ дѣйствія на нее силы, а слѣд., если масса совершаетъ движеніе со скоростью перемѣнною по величинѣ или направленію, т. е. движеніе съ ускореніемъ,

отличнымъ отъ нуля, то не иначе, какъ отъ дѣйствія на нее нѣкоторой силы. Другими словами, дѣйствіе силы на массу обнаруживается существованіемъ ускоренія въ движеніи массы. Сдѣланное нами условіе или опредѣленіе носитъ названіе **перваго закона Ньютона** или закона **инерціи**. Подъ инерціей разумѣется неспособность матеріи самой по себѣ измѣнять свою скорость.

У Ньютона первый законъ изложенъ такъ:

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Всякое тѣло сохраняетъ свое состояніе покоя или прямолинейнаго и равномѣрнаго движенія, если только приложенныя къ нему силы не побуждаютъ его измѣнить свое состояніе.

89. Второй законъ Ньютона. Законъ параллелограмма силъ. Первый законъ Ньютона даетъ намъ возможность обнаружить, приложена ли къ данной массѣ сила или нѣтъ: если масса движется съ ускореніемъ, сила приложена; если нѣтъ ускоренія, нѣтъ и силы. Посмотримъ теперь, какъ сравнить между собою величины двухъ силъ. Силы могутъ отличаться одна отъ другой во первыхъ тѣмъ, что онѣ приложены къ различнымъ массамъ; во вторыхъ тѣмъ, что онѣ сообщаютъ массамъ различныя ускоренія. Двѣ силы, сообщающія равнымъ массамъ равныя ускоренія, мы признаемъ равными, такъ какъ для различенія ихъ не имѣемъ основанія.

Положимъ, что нѣкоторая масса m имѣетъ въ разсматриваемый моментъ ускореніе g. Раздѣлимъ эту массу на n равныхъ частей, и пусть каждая изъ нихъ будетъ m_1, такъ что $m = nm_1$. Тогда про одно и то же явленіе—движеніе массы m съ ускореніемъ g, мы можемъ сказать, или, что къ массѣ m приложена сила f, сообщающая ей ускореніе g, или, что къ n массамъ m_1 приложены n равныхъ между собою силъ f_1, сообщающихъ каждой массѣ m_1 то же ускореніе g. Отсюда естественно **принять**, что сила f въ n разъ больше силы f_1, или,

$$\frac{f}{f_1} = \frac{m}{m_1}, \tag{1}$$

т. е. силы, сообщающія различнымъ массамъ равныя ускоренія, прямопропорціональны массамъ.

Ускореніе массы представляетъ собою векторъ; слѣд., мы можемъ разсматривать это ускореніе, какъ геометрическую сумму двухъ или болѣе векторовъ, и въ этомъ смыслѣ условно можемъ говорить (§ 84), что данная масса имѣетъ, вмѣсто одного, одновременно два, три или болѣе ускореній. Распространимъ то же условіе и на силы, т. е. **примемъ**, что на массу могутъ одновременно

дѣйствовать нѣсколько силъ, при чемъ только ускоренія, сообщаемыя массѣ этими силами, должны въ геометрической суммѣ давать ускореніе массы.

Положимъ, что одна и та же масса m отъ двухъ силъ f_1 и f_2 получаетъ различныя ускоренія g_1 и g_2, и пусть $g_2 = ng_1$. Тогда, по предъидущему, мы можемъ представить себѣ, что во второмъ случаѣ на массу m дѣйствуетъ не одна сила f_2, а n равныхъ между собою силъ φ, сообщающихъ каждая ускореніе g_1. Силы φ и f_1 мы считаемъ равными, такъ какъ онѣ равнымъ массамъ сообщаютъ равныя ускоренія. Отсюда принимаемъ, что $f_2 = nf_1$, или

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{g_1}{g_2}, \tag{2}$$

т. е. силы, сообщающія равнымъ массамъ различныя ускоренія, пропорціональны этимъ ускореніямъ.

Сравнимъ теперь двѣ силы f и f_1, сообщающія массамъ m и m_1 соотвѣтственно ускоренія g и g_1. Разсмотримъ еще третью силу f_0, сообщающую массѣ m_1 ускореніе g. Тогда по (1) сравненіе силъ f_0 и f даетъ:

$$\frac{f}{f_0} = \frac{m}{m_1};$$

съ другой стороны по (2):

$$\frac{f_0}{f_1} = \frac{g}{g_1}.$$

Перемножая эти равенства, получимъ

$$\frac{f}{f_1} = \frac{mg}{m_1 g_1}, \tag{3}$$

т. е. силы, сообщающія различнымъ массамъ различныя ускоренія, относятся между собою, какъ произведенія соотвѣтственныхъ массъ на ускоренія.

Ускореніе, результатъ дѣйствія силы на массу, представляетъ собою векторъ; поэтому мы принимаемъ, что и сила также можетъ быть изображена векторомъ, совпадающимъ по направленію съ ускореніемъ, но по (3) пропорціональнымъ произведенію изъ массы на ускореніе. Сдѣланное нами раньше условіе о совмѣстномъ дѣйствіи нѣсколькихъ силъ на данную массу можемъ теперь формулировать такъ: если масса движется съ ускореніемъ, то можно сказать безразлично, что на нее дѣйствуетъ одна сила или совмѣстно

нѣсколько силъ, если только геометрическая сумма послѣднихъ равна предъидущей силѣ.

Геометрическая сумма нѣсколькихъ силъ, приложенныхъ къ одной и той же массѣ, носитъ названіе **равнодѣйствующей силы**.

Когда за единицу силъ принята сила, которая единицѣ массы (грамму) сообщаетъ единицу ускоренія (сантиметръ въ секунду на секунду), то по (3) найдемъ

$$f = mg,$$

т. е. величина силы выразится, какъ произведеніе чиселъ, представляющихъ собою величины массы и ускоренія. Въ этомъ случаѣ единица силы носитъ названіе **дины** и представится такимъ символомъ:

$$(\text{дина}) = \frac{(\text{граммъ}).\,(\text{сантим.})}{(\text{сек. ср. вр.})^2}.$$

Изъ всего сказаннаго вытекаетъ, что сила характеризуется 1) мѣстомъ приложенія, 2) своею величиною и 3) своимъ направленіемъ.

Сдѣланныя нами условія о величинѣ, направленіи и совмѣстномъ дѣйствіи силъ изложены Ньютономъ въ его **второмъ законѣ** и примѣчаніи (corollarium) къ этому закону.

Второй законъ говоритъ:

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Измѣненіе движенія (§ 86) пропорціонально приложенной силѣ и происходитъ въ направленіи силы.

Въ примѣчаніи къ этому закону говорится о совмѣстномъ дѣйствіи силы.

Corpus viribus conjunctis diagonalem parallelogrammi eodem tempore describere quo latera separatis.

Отъ совокупнаго дѣйствія (двухъ) силъ тѣло описываетъ діагональ параллелограмма въ теченіе того же времени, какъ и стороны его при дѣйствіи силъ порознь.

Условіе о совмѣстномъ дѣйствіи силъ обыкновенно называется **закономъ параллелограмма силъ**.

90. Третій законъ Ньютона или законъ дѣйствія и противодѣйствія. Первый законъ Ньютона учитъ насъ, какъ узнать, приложена ли сила къ тѣлу, второй указываетъ величину и направленіе силы. Но всетаки эти два закона не даютъ полнаго и законченнаго опредѣленія силы: съ одной стороны остается безъ отвѣта вопросъ, какая причина тому, что сила дѣйствуетъ на массу, а

съ другой, по закону параллелограмма, мы можемъ предполагать безразлично, что на тѣло дѣйствуютъ одна или много силъ, лишь бы всѣ эти силы имѣли одну и ту же равнодѣйствующую, и пока не имѣемъ основаній остановиться на какой либо изъ возможныхъ въ безконечномъ числѣ комбинацій. Выходъ изъ этой неопредѣленности, а вмѣстѣ съ тѣмъ и разрѣшеніе вышеупомянутаго вопроса о причинѣ или источникѣ силы, и дается третьимъ закономъ Ньютона или закономъ о дѣйствіи и противодѣйствіи.

Искать причину измѣненія скорости какой либо массы мы можемъ лишь въ томъ, что около движущейся массы находятся еще и другія массы. Если бы разсматриваемая масса была одна, была вполнѣ изолирована въ мірѣ, то мы не имѣли бы никакихъ основаній допускать, что движеніе ея измѣняется. Даже само движеніе не имѣло бы тогда никакаго физическаго значенія; конечно, можно было бы вообразить безчисленное множество гипотетическихъ средъ, въ которыхъ двигалась бы разсматриваемая масса, но любое изъ такихъ движеній было бы геометрическимъ построеніемъ, а не физическимъ явленіемъ. Явленіемъ физическимъ можетъ быть лишь движеніе тѣла относительно другого тѣла, т. е. движеніе среды, геометрически связанной съ одной массой, въ средѣ, геометрически зависящей отъ другой. Но, когда у насъ имѣются хотя бы двѣ массы, то уже мыслимо, что различіе въ ихъ взаимномъ положеніи можетъ вліять на движеніе массъ другъ относительно друга. Поэтому законъ объ источникѣ силъ долженъ быть таковъ, чтобы уже и для двухъ массъ онъ давалъ вполнѣ законченный результатъ.

Мы принимаемъ, что источникомъ силы F, дѣйствующей на массу M, служитъ такая масса M_1, на которую дѣйствуетъ сила F_1, равная, но прямопротивоположная силѣ F.

Если силу F назовемъ дѣйствіемъ, а силу F_1 противодѣйствіемъ, то можемъ сказать, что всякому дѣйствію соотвѣтствуетъ равное и прямопротивоположное ему противодѣйствіе.

Сдѣланное условіе, очевидно, выполняетъ высказанное раньше требованіе, чтобы и для двухъ массъ не осталось ничего неопредѣленнаго: источникомъ для силы F_1, по тому же правилу, оказывается масса M и, слѣд., система силъ F и F_1 вполнѣ опредѣленная и замкнутая.

Теперь уже ясна необходимость закона параллелограмма и всякая неопредѣленность исчезаетъ: тѣ силы дѣйствуютъ на массу, для которыхъ мы можемъ указать источникъ. Если извѣстенъ источникъ для одной силы, то и приложена на самомъ дѣлѣ къ тѣлу только одна сила, и слѣд., разложеніе ея представляетъ собою лишь геометрическое построеніе; если для одной силы не нашли источника, то должно искать для двухъ, трехъ или болѣе, и только

тогда опредѣлится, какія силы и въ какомъ числѣ приложены къ тѣлу въ дѣйствительности.

Ньютономъ третій законъ формулируется такъ:

Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

Дѣйствію всегда соотвѣтствуетъ равное и противоположное противодѣйствіе или дѣйствія двухъ тѣлъ другъ на друга всегда равны и прямопротивоположно направлены.

Замѣтимъ, что высказанный нами законъ, требующій, чтобы дѣйствіе и противодѣйствіе были равны и прямопротивоположны (§ 6), даетъ возможность указать источникъ лишь для такихъ силъ, которыя дѣйствуютъ на массу безконечно малыхъ размѣровъ, да и источникомъ можетъ служить лишь масса размѣровъ также безконечно малыхъ. Иначе, для конечныхъ массъ о прямой противоположности не можетъ быть рѣчи, такъ какъ точекъ приложенія силъ будетъ безчисленное множество. Поэтому, когда силы приложены къ массѣ, занимающей конечный объемъ, надо предварительно разбить эту массу мысленно на безконечно малые элементы и затѣмъ уже искать источники для силъ, дѣйствующихъ на элементарныя массы.

Законъ о дѣйствіи и противодѣйствіи заканчиваетъ собою тотъ рядъ опредѣленій или условій, съ помощью которыхъ вводится въ Механику понятіе о силѣ. Мы придерживались изложенія Ньютона, причемъ основнымъ понятіемъ служило у насъ понятіе о матеріи или массѣ, и изъ него, съ помощью понятій о времени и пространствѣ, мы получили, какъ производное понятіе, силу. Можно было бы итти обратнымъ путемъ и взять за основное понятіе силу, тогда понятіе о массѣ можно было бы ввести съ помощью ряда условій, подобныхъ вышеприведеннымъ.

91. Движеніе массы относительно другой массы. Въ § 89 мы упомянули, что физическимъ явленіемъ можетъ быть лишь движеніе одного тѣла относительно другого; опредѣлимъ точнѣе, что мы подразумѣваемъ подъ такимъ движеніемъ. Геометрическимъ образомъ, связаннымъ съ представленіемъ о массѣ, служитъ трехмѣрная среда (§ 38). Если масса твердая, т. е. такая, что разстояніе между любыми двумя точками въ ней остается постояннымъ, то среда, ей соотвѣтствующая, будетъ неизмѣняемою; для массы мягкой среда будетъ деформирующеюся. Въ первомъ случаѣ среду (неизмѣнную) легко распространить и за границы объема, занятаго самою массою, а потому опредѣлить, что называется движеніемъ какой либо массы, твердой или мягкой безразлично, относительно твердой, нетрудно: это движеніе нѣкоторой деформирующейся или неизмѣнной среды, соотвѣтствующей движущейся массѣ,

въ средѣ, неизмѣнно связанной съ твердою массою. Если же тѣло A, относительно котораго мы желаемъ разсмотрѣть движеніе другого тѣла B, само мягкое, то подъ движеніемъ тѣла B относительно A, соотвѣтствующимъ данному моменту, будемъ разумѣть движеніе B относительно массы A, затвердѣвшей въ той конфигураціи, которую она имѣла въ разсматриваемый моментъ. Такимъ образомъ и здѣсь придется имѣть дѣло лишь съ движеніемъ въ неизмѣняемой средѣ.

ДИНАМИКА ТОЧКИ.

ГЛАВА IX.

Матеріальная точка. Дифференціальныя уравненія движенія точки. Ихъ интегралы.

92. Матеріальная точка. Когда масса движется поступательно, можно ограничиться изученіемъ движенія одной какой-нибудь точки этой массы. Тогда естественно и силу, дѣйствующую на тѣло, изобразить векторомъ, приложеннымъ къ выбранной нами точкѣ, представительницѣ остальныхъ точекъ тѣла. Такая точка, замѣняющая собою массу, носитъ названіе точки матеріальной. Вмѣсто того, чтобы говорить о тѣлѣ, движущемся поступательно подъ дѣйствіемъ силы F, можно говорить о движеніи матеріальной точки, къ которой приложена та же сила F. Матеріальная точка характеризуется не только своими координатами, какъ точка геометрическая или кинематическая, но и своею массою, т. е. массою того тѣла, движеніе котораго представляется взятою матеріальною точкою.

Мягкое тѣло можетъ двигаться самымъ произвольнымъ образомъ, но мы всегда будемъ предполагать, что движенія безконечно близкихъ точекъ массы различаются безконечно мало. Поэтому, если раздѣлить движущееся тѣло какими либо поверхностями, напр., координатными, на безконечно малые по объему элементы, то можно принять, что эти элементы движутся поступательно, и слѣд. каждый изъ нихъ можетъ быть замѣненъ матеріальною точкою съ безконечно малою массою. Такимъ образомъ и самый общій случай движенія деформирующагося тѣла сводится къ разсмотрѣнію движенія совокупности матеріальныхъ точекъ.

Динамика точки изучаетъ движеніе одной матеріальной точки подъ дѣйствіемъ заданныхъ силъ. Разсмотрѣніе движе-

нія совокупности матеріальныхъ точекъ съ конечными или безконечно малыми массами составитъ предметъ **Динамики системы**.

93. Дифференціальныя уравненія движенія матеріальной точки. Если второй законъ Ньютона, примѣненный къ матеріальной точкѣ, выразимъ формулою, то найдемъ:

$$(m\dot{v}) = (F),$$

гдѣ m масса точки, $\dot{v}$ — ея ускореніе, F — равнодѣйствующая приложенныхъ силъ.

Когда система координатъ, опредѣляющихъ положеніе точки, декартова, то предъидущее равенство можно замѣнить тремя такими (§ 49):

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = mx'' = F\cos(Fx) = X;$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = my'' = F\cos(Fy) = Y; \qquad (1)$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = mz'' = F\cos(Fz) = Z.$$

Когда же координаты какія либо криволинейныя, то (§ 52) имѣемъ:

$$\frac{m}{A_1}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial q_1'} - \frac{\partial h}{\partial q_1}\right\} = F\cos(F1) = Q_1;$$

$$\frac{m}{A_2}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial q_2'} - \frac{\partial h}{\partial q_2}\right\} = F\cos(F2) = Q_2; \qquad (2)$$

$$\frac{m}{A_3}\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial q_3'} - \frac{\partial h}{\partial q_3}\right\} = F\cos(F3) = Q_3;$$

гдѣ Q_1, Q_2, Q_3 проекціи равнодѣйствующей на соотвѣтственныя оси криволинейныхъ координатъ.

Такъ напр. для сферическихъ координатъ (§§ 39 и 52), найдемъ:

$$m(\rho'' - \rho\varphi'^2 - \rho\sin^2\varphi\,\psi'^2) = F\cos(F\alpha) = \mathrm{P};$$

$$m\left[\frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\varphi') - \rho\sin\varphi\cos\varphi\,\psi'^2\right] = F\cos(F\beta) = \Phi; \qquad (3)$$

$$\frac{m}{\rho\sin\varphi}\frac{d}{dt}(\rho^2\sin^2\varphi\,\psi') = F\cos(F\gamma) = \Psi.$$

Для цилиндрическихъ, подобнымъ образомъ:

$$m z'' = F \cos(F\lambda) = Z;$$

$$m(r'' - r\theta'^2) = F \cos(F\mu) = R; \quad (4)$$

$$\frac{m}{r}\frac{d}{dt}(r^2\theta') = F \cos(F\nu) = \Theta.$$

Если возьмемъ проекціи ускоренія на касательную, радіусъ кривизны и бинормаль траекторіи, то (§§ 49 и 51) получимъ:

$$m\frac{dv}{dt} = F_v;$$

$$m\frac{v^2}{\rho} = F_\rho; \quad (5)$$

$$0 = F_b;$$

гдѣ F_v, F_ρ, F_b проекціи равнодѣйствующей на вышеупомянутыя три направленія.

Зависимость силъ отъ времени, положенія точки и скорости ея можетъ быть задана произвольно, т. е. въ равенствахъ общаго типа (2) количества Q_1, Q_2, Q_3 произвольныя данныя функціи времени, координатъ, и первыхъ производныхъ отъ координатъ по времени:

$$Q_1 = f_1(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3'); \; Q_2 = f_2; \; Q_3 = f_3.$$

Производныхъ второго и высшихъ порядковъ не вводятъ аргументами въ функціи f_1, f_2, и f_3 потому, что связь между силами и ускореніями перваго и высшаго порядка не можетъ быть дана по произволу, а должна согласоваться со вторымъ закономъ Ньютона.

Такимъ образомъ, равенства (2) представляютъ собою три зависимости между временемъ, координатами q_1, q_2, q_3, ихъ первыми и вторыми производными по времени. Главная задача Динамики точки состоитъ въ опредѣленіи движенія точки по заданнымъ силамъ, слѣд. конечная цѣль ея заключается въ нахожденіи координатъ движущейся точки, какъ функцій времени изъ равенствъ (2). Въ этомъ смыслѣ равенства (2) служатъ совокупными дифференціальными уравненіями второго порядка относительно трехъ неизвѣстныхъ функцій времени q_1, q_2, q_3, и слѣд. задача Динамики сводится къ интегрированію системы этихъ совокупныхъ уравненій, носящихъ названіе дифференціальныхъ уравненій движенія матеріальной точки.

94. Интегралы движенія. Пріемы для интегрированія совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій излагаются въ курсахъ Анализа,—мы ограничимся здѣсь замѣчаніями самаго общаго характера. Такъ какъ дифференціальныя уравненія движенія второго порядка относительно трехъ неизвѣстныхъ функцій q_1, q_2, q_3, то самыя общія выраженія для искомыхъ функцій времени будутъ содержать шесть произвольныхъ постоянныхъ. Для полученія такихъ общихъ выраженій мы въ большинствѣ случаевъ пойдемъ нижеслѣдующимъ путемъ.

Функція h (§ 43) относительно скоростей q_1', q_2', q_3' степени второй, слѣд. производная $\frac{\partial h}{\partial q_i}$, будетъ линейною функціею отъ скоростей q_i', а потому лѣвыя части уравненій (2) содержатъ вторыя производныя отъ координатъ лишь линейнымъ образомъ. Положимъ, что систему (2) намъ удалось замѣнить ей равносильною такою

$$\frac{d}{dt}\varphi_1(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_2(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = 0; \qquad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_3(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = 0.$$

Двѣ системы уравненій мы называемъ равносильными или эквивалентными тогда, когда одна изъ нихъ является слѣдствіемъ другой и наоборотъ другая слѣдствіемъ первой.

Но система (6) равносильна слѣдующей:

$$\varphi_1(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = C_1;$$

$$\varphi_2(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = C_2; \qquad (7)$$

$$\varphi_3(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = C_3;$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 произвольныя постоянныя. Равенства (7) и подобныя имъ, т. е. содержащія время, произвольныя постоянныя, координаты, скорости и справедливыя въ силу дифференціальныхъ уравненій движенія, носятъ названіе первыхъ интеграловъ движенія.

Допустимъ далѣе, что и систему (7) мы съумѣемъ свести къ такой, ей равносильной:

$$\frac{d}{dt}\Psi_1(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_2) = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_2(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_3) = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\Psi_3(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_3) = 0.$$

Но эта система равносильна слѣдующей:

$$\begin{aligned} &\Psi_1(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_3) = C_4; \\ &\Psi_2(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_3) = C_5; \qquad (8) \\ &\Psi_3(t, q_1, q_2, q_3, C_1, C_2, C_3) = C_6. \end{aligned}$$

Полученныя равенства и подобныя имъ, т. е. содержащія время, координаты, произвольныя постоянныя, не заключающія въ себѣ скоростей и справедливыя въ силу дифференціальныхъ уравненій движенія, носятъ названіе вторыхъ интеграловъ движенія. Когда найдены три независимыхъ другъ отъ друга вторыхъ интеграла, содержащихъ шесть независимыхъ другъ отъ друга произвольныхъ постоянныхъ, то задача интегрированія кончена: мы можемъ отсюда опредѣлить самыя общія выраженія для искомыхъ функцій времени q_1, q_2, q_3, выраженія, содержащія шесть произвольныхъ постоянныхъ. Такъ въ нашемъ случаѣ изъ равенствъ (8) имѣемъ:

$$\begin{aligned} &q_1 = f_1(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \\ &q_2 = f_2(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6); \qquad (9) \\ &q_3 = f_3(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6). \end{aligned}$$

Въ томъ, что самыя общія выраженія для координатъ должны заключать въ себѣ шесть произвольныхъ постоянныхъ, мы можемъ убѣдиться и безъ помощи Анализа такими кинематическими соображеніями. Дифференціальныя уравненія движенія опредѣляютъ собою въ любой моментъ величину и направленіе ускоренія движущейся точки, слѣд., если мы въ какой либо данный моментъ t_0, называемый начальнымъ, дадимъ движущейся точкѣ произвольное положеніе и сообщимъ ей произвольную скорость, то, зная

ускореніе, съумѣемъ найти скорость и положеніе этой точки для момента t_1, смежнаго съ начальнымъ. Принявши этотъ моментъ t_1 за начальный, тѣмъ же путемъ опредѣлимъ скорость и положеніе точки для момента t_2, безконечно мало отстоящаго отъ t_1, и т. д.; такимъ образомъ, вообще говоря, мы съумѣемъ найти скорость и положеніе точки для любого момента, слѣдующаго за начальнымъ или предшествовавшаго ему. Другими словами, мы опредѣлимъ движеніе точки при любомъ начальномъ положеніи и при любой начальной скорости, а для этого необходимо шесть произвольныхъ постоянныхъ. Давши соотвѣтственныя значенія этимъ постояннымъ, мы заставимъ нашу движущуюся точку въ данный моментъ пройти черезъ данное положеніе съ данною скоростью. Если данный начальный моментъ—t_0, данныя начальныя координаты точки—q_{10}, q_{20}, q_{30}, а данныя начальныя скорости (по координатамъ)—q'_{10}, q'_{20}, q'_{30}, то по (9) произвольныя постоянныя $C_1, C_2, \ldots C_6$ должны быть корнями уравненій:

$$q_{10} = f_1(t_0, C_1, \ldots C_6),\; q_{20} = f_2(t_0, C_1, \ldots C_6),\; q_{30} = f_3(t_0, C_1 \ldots C_6),$$

$$q'_{10} = f_1'(t_0, C_1, \ldots C_6),\; q'_{20} = f_2'(t_0, C_1, \ldots C_6),\; q'_{30} = f_3'(t_0, C_1 \ldots C_6),$$

гдѣ запятою означены производныя по времени.

Всякая система N совокупныхъ дифференціальныхъ уравненій второго порядка можетъ быть замѣнена системою $2N$ уравненій перваго порядка. Поэтому, если мы къ самимъ дифференціальнымъ уравненіямъ (2) прибавимъ три такихъ уравненія:

$$\frac{dq_1}{dt} = q_1'; \quad \frac{dq_2}{dt} = q_2'; \quad \frac{dq_3}{dt} = q_3'; \tag{10}$$

то получимъ шесть совокупныхъ уравненій перваго порядка относительно шести неизвѣстныхъ функцій времени $q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3'$. Интегрированіе этой системы будетъ закончено, если намъ удастся найти шесть ея независимыхъ интеграловъ

$$\gamma_1(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = A_1,$$

$$\gamma_2(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = A_2,$$

. . . .

$$\gamma_6(t, q_1, q_2, q_3, q_1', q_2', q_3') = A_6.$$

гдѣ $A_1, \ldots A_6$ произвольныя постоянныя. Изъ написанныхъ равенствъ опредѣлимъ

$$q_1 = f_1(t, A_1, A_2, \ldots A_6);$$

$$q_2 = f_2(t, A_1, A_2, \ldots A_6);$$

$$q_3 = f_3(t, A_1, A_2, \ldots A_6);$$

$$q_1' = \varphi_1(t, A_1, A_2, \ldots A_6);$$

$$q_2' = \varphi_2(t, A_1, A_2, \ldots A_6);$$

$$q_3' = \varphi_3(t, A_1, A_2, \ldots A_6);$$

при чемъ должно оказаться, что

$$\varphi_1 = \frac{df_1}{dt}; \ \varphi_2 = \frac{df_2}{dt}; \ \varphi_3 = \frac{df_3}{dt};$$

какъ этого требуютъ уравненія (10).

ГЛАВА X.

Прямолинейное движенiе свободной матерiальной точки.

95. Условiя, при которыхъ свободная матерiальная точка движется прямолинейно. Въ предъидущей главѣ мы вывели дифференцiальныя уравненiя движенiя матерiальной точки подъ дѣйствiемъ заданныхъ силъ, когда движенiе этой точки ничѣмъ не стѣснено, не ограничено никакимъ заранѣе даннымъ условiемъ, или, какъ говорятъ, когда точка свободна. Теперь мы займемся разсмотрѣнiемъ простѣйшаго случая движенiя свободной матерiальной точки, а именно того, когда эта точка движется прямолинейно. Если одну изъ координатныхъ осей, напр. Ox, направимъ параллельно разсматриваемой траекторiи, то уравненiя этой траекторiи будутъ

$$y = const, \quad z = const,$$

а слѣд. по (1) главы IX:

$$Y = 0, \quad Z = 0;$$

т. е. равнодѣйствующая должна имѣть постоянное направленiе, параллельное траекторiи.

Но этого условiя недостаточно, ибо тогда два послѣднiя уравненiя движенiя (1) главы IX будутъ

$$y'' = 0, \quad z'' = 0,$$

что по интегрированiи даетъ

$$y = at + \alpha, \quad z = bt + \beta,$$

гдѣ a, b, α, β произвольныя постоянныя. Условимся всегда означать начальный моментъ—t_0, начальныя координаты точки—x_0, y_0, z_0;

начальныя скорости по осямъ—x_0', y_0', z_0'. Тогда предъидущія равенства даютъ

$$y = y_0'(t - t_0) + y_0\,;\ z = z_0'(t - t_0) + z_0\,;$$

откуда видимъ, что траекторія будетъ прямою, параллельною Ox, лишь тогда, когда

$$y_0' = 0\,;\ z_0' = 0\,. \tag{2}$$

Такимъ образомъ по (1) и (2) свободная матеріальная точка описываетъ прямую линію тогда, когда сила, приложенная къ ней, имѣетъ постоянное направленіе, а начальная скорость параллельна этому направленію.

Въ дальнѣйшемъ мы будемъ брать траекторію за Ox ($y = 0$; $z = 0$) и слѣд. ограничимся изслѣдованіемъ одного только уравненія

$$mx'' = X = f(t, x, x'). \tag{3}$$

96. Прямолинейное движеніе подъ дѣйствіемъ силы, зависящей лишь отъ времени. Когда данныя силы зависятъ только отъ времени, т. е. когда

$$X = f(t),$$

задача о прямолинейномъ движеніи точки рѣшается весьма просто.

Интегрируя уравненіе (3) и опредѣляя произвольныя постоянныя по начальнымъ даннымъ, получаемъ

$$mx' = mx_0' + \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt.$$

Интегрируя еще разъ, имѣемъ окончательно:

$$mx - mx_0 = mx_0'(t - t_0) + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt \right\}. \tag{4}$$

Примѣръ: Прямолинейное движеніе тяжелой точки. Если ось x—овъ направлена вертикально книзу, а ускореніе тяжести означимъ g, то уравненіе движенія будетъ

$$mx'' = mg,$$

и слѣд. по (4):

$$x = x_0 + x_0'(t - t_0) + \frac{g}{2}(t - t_0)^2.$$

Если $x_0' > 0$, то съ самаго начала движенія (съ момента t_0) точка падаетъ внизъ. Если $x_0' < 0$, то до момента $\tau = t_0 - \frac{x_0'}{g}$ точка движется кверху, въ моментъ τ пріостанавливается на высотѣ $x_0 - \frac{x_0'^2}{2g}$ и затѣмъ падаетъ внизу.

97. Прямолинейное движеніе подъ дѣйствіемъ силы, зависящей лишь отъ положенія точки. Когда сила зависитъ только отъ положенія точки, т. е.

$$X = f(x),$$

то вопросъ о прямолинейномъ движеніи точки рѣшается съ помощью двухъ квадратуръ. Умножаемъ обѣ части уравненія (3) на

$$x'dt = dx,$$

тогда обратимъ ихъ въ полные дифференціалы:

$$x'\,x''\,dt = x'\,dx' = f(x)\,dx;$$

слѣд., интегрируя, найдемъ:

$$\frac{1}{2}x'^2 = \boldsymbol{F}(x) + C,$$

гдѣ C произвольная постоянная, а $\boldsymbol{F}(x) = \int f(x)\,dx$. Рѣшая полученное уравненіе относительно x', имѣемъ

$$x' = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2\,F(x) + 2C},$$

или

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x) + C}} = \pm\,dt\sqrt{2};$$

откуда, интегрируя,

$$t\sqrt{2} + B = \int\frac{dx}{\sqrt{F(x) + C}} = \Phi(x, C),$$

гдѣ B новая произвольная постоянная. Полученное равенство и опредѣляетъ x какъ функцію отъ t и двухъ постоянныхъ произвольныхъ.

Примѣры: а) Прямолинейное движеніе точки подъ дѣйствіемъ силы притяженія къ неподвижному центру прямопропорціонально разстоянію. и массъ точкъ

Возьмемъ центръ притяженія за начало координатъ. Тогда, если коэффиціентъ пропорціональности примемъ равнымъ k^2m, для силы F имѣемъ выраженіе:

$$F = k^2mr,$$

гдѣ r разстояніе отъ точки до начала координатъ, или

$$F = \pm k^2mx, \tag{5}$$

при чемъ должно взять верхній знакъ, если $x > 0$, т. е. точка на положительной половинѣ оси x—овъ, и нижній знакъ, если $x < 0$, т. е. точка на отрицательной половинѣ оси x—овъ. Сила F направлена къ началу координатъ, слѣд.

$$\cos(Fx) = \mp 1; \tag{6}$$

верхній знакъ надо взять, когда $x > 0$, а нижній, когда $x < 0$. Соединяя (5) и (6), получимъ для $X = F\cos(Fx)$ такое выраженіе

$$X = -k^2mx,$$

независимо отъ того, гдѣ точка находится, на положительной или на отрицательной половинѣ оси x—овъ.

Интегрируемъ уравненіе:

$$mx'' = -k^2mx.$$

вышеуказаннымъ способомъ; тогда, по сокращеніи на m, получаемъ

$$\frac{1}{2}x'^2 = -\frac{1}{2}k^2x^2 + C.$$

Произвольную постоянную C опредѣляемъ изъ начальныхъ условій:

$$C = \frac{1}{2}x_0'^2 + \frac{1}{2}k^2x_0^2.$$

Слѣд. найденный интегралъ:

$$x'^2 = k^2(n^2 - x^2), \tag{7}$$

гдѣ мы положили

$$k^2n^2 = x_0'^2 + k^2x_0^2.$$

Уже изъ (7) видимъ, что наибольшее удаленіе точки отъ притягивающаго центра не можетъ превышать n. Пусть положительное направленіе оси x—овъ выбрано такъ, что $x_0' > 0$, тогда по крайней мѣрѣ въ началѣ движе-

движение точки подъ дѣйствiемъ начальной
скорости и силы притяженiя т.д.

нія проекція скорости на Ox будетъ положительна, слѣд., извлекая радикалъ со знакомъ $+$, получаемъ:

$$\frac{dx}{\sqrt{n^2-x^2}}=kdt;$$

откуда

$$arc\ sin\frac{x}{n}=kt+\gamma.$$

Произвольная постоянная

$$\gamma=arc\ sin\frac{x_0}{n}-kt_0.$$

Иначе можемъ написать:

$$x=n\,.\,sin\,(kt+\gamma). \tag{8}$$

Движеніе, опредѣляемое написаннымъ уравненіемъ, называется простымъ гармоническимъ движеніемъ. Точка колеблется около центра притяженія; наибольшее отклоненіе ея отъ центра равно n и называется амплитудою. Движеніе гармоническое служитъ примѣромъ движеній періодическихъ, т. е. такихъ, въ которыхъ движущаяся точка въ моменты времени, отстоящіе другъ отъ друга на постоянный промежутокъ T, называемый періодомъ, занимаетъ одно и то же положеніе и имѣетъ одну и ту же скорость. Въ нашемъ случаѣ періодъ

$$T=\frac{2\pi}{k}.$$

Если бы мы пожелали представить графически, какъ измѣняются съ теченіемъ времени скорость движущейся точки и разстояніе ея отъ притягивающаго центра, при чемъ абсцисса изображала бы собою время, а ордината—скорость или разстояніе, то мы получили бы кривыя линіи, называемыя синусоидами. Этими синусоидами часто пользуются въ Физикѣ, когда рѣчь идетъ о простомъ гармоническомъ движеніи.

б) Прямолинейное движеніе точки подъ дѣйствіемъ силы отталкиванія отъ неподвижнаго центра прямопропорціонально разстоянію. Беремъ начало въ центрѣ отталкиванія. Тогда совершенно такъ, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ, убѣдимся, что въ разсматриваемомъ случаѣ

$$X=k^2mx,$$

если коэффиціентъ пропорціональности взятъ равнымъ k^2m.

Интегрируя уравненіе

$$mx''=k^2mx,$$

получимъ

$$\frac{1}{2}x'^2 = C + \frac{1}{2}k^2x^2,$$

или, опредѣляя произвольную постоянную C по начальнымъ даннымъ:

$$x'^2 = x_0'^2 - k^2x_0^2 + k^2x^2 \tag{9}$$

Пусть положительное направленіе оси x—овъ параллельно начальной скорости, тогда $x_0' > 0$, а потому, извлекая радикалъ со знакомъ $+$, имѣемъ:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 + x^2}} = kdt,$$

откуда интегрируя:

$$log\left(x + \sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 + x^2}\right) = kt + B.$$

Произвольная постоянная B опредѣлится такъ:

$$B = log\left(x_0 + \frac{x_0'}{k}\right) - kt_0.$$

Подставляя это значеніе для B и замѣняя логарифмы числами, найдемъ:

$$x + \sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 + x^2} = \left(x_0 + \frac{x_0'}{k}\right)e^{k(t-t_0)} \tag{10}$$

Приравнивая обратныя величины, получимъ

$$\frac{1}{x + \sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 + x^2}} = \frac{\sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 + x^2} - x}{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2} = \frac{1}{x_0 + \frac{x_0'}{k}}e^{-k(t-t_0)};$$

что, послѣ упрощенія, даетъ:

$$x - \sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 + x^2} = \left(x_0 - \frac{x_0'}{k}\right)e^{-k(t-t_0)}. \tag{11}$$

Изъ (10) и (11), складывая, найдемъ

$$x = \frac{1}{2}\left\{\left(x_0 + \frac{x_0'}{k}\right)e^{k(t-t_0)} + \left(x_0 - \frac{x_0'}{k}\right)e^{-k(t-t_0)}\right\}. \tag{12}$$

Постоянная $x_0'^2 - k^2x_0^2$ можетъ быть больше нуля, меньше нуля и равна нулю. Разберемъ всѣ эти три случая.

1) $\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 > 0.$

Въ выраженіи (12) беремъ за общій множитель $\sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2}-x_0^2}$; тогда окажется

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_0'^2}{k^2}-x_0^2}\left\{e^{k(t-\tau)}-e^{-k(t-\tau)}\right\}, \tag{13}$$

если

$$e^{k\tau}=e^{kt_0}\sqrt{\frac{x_0'-kx_0}{x_0'+kx_0}}.$$

Такъ какъ по (9) скорость не можетъ обратиться въ нуль, то движеніе происходитъ всегда въ одномъ направленіи, а именно въ положительномъ направленіи оси x—овъ (по условію, $x_0'>0$). Если точка въ своемъ начальномъ положеніи была на положительной половинѣ оси x—овъ ($x_0>0$), то она съ постоянно возрастающею скоростью будетъ непрерывно удаляться отъ центра отталкиванія.

Если $x_0<0$, т. е. начальное положеніе на отрицательной половинѣ оси x—овъ, то скорость движущейся точки сначала уменьшается, пока не достигнетъ своего минимума $\sqrt{x_0'^2-k^2x_0^2}$ въ тотъ моментъ ($t=\tau$), когда движущаяся точка проходитъ черезъ центръ отталкиванія ($x=0$); затѣмъ скорость все возрастаетъ и точка уходитъ на безконечность въ положительномъ направленіи оси x—овъ.

2) $\frac{x_0'^2}{k^2}-x_0^2<0$.

Теперь въ выраженіи (12) беремъ за общій множитель $\sqrt{x_0^2-\frac{x_0'^2}{k^2}}$, что даетъ

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{x_0^2-\frac{x_0'^2}{k^2}}\left\{e^{k(t-\lambda)}+e^{-k(t-\lambda)}\right\}, \tag{14}$$

если

$$e^{k\lambda}=e^{kt_0}\sqrt{\frac{kx_0-x_0'}{kx_0+x_0'}},$$

По (9) или (14) видимъ, что наименьшее возможное численное значеніе координаты x равняется

$$\sqrt{x_0^2-\frac{x_0'^2}{k^2}};$$

для этого значенія скорость по (9) обращается въ нуль и затѣмъ измѣняетъ свое направленіе. Если $x_0>0$, то точка съ возрастающею скоростью удаляется на безконечность въ положительномъ направленіи оси x—овъ (по условію $x_0'>0$); если же $x_0<0$, то движущаяся точка съ убывающею скоростью приближается къ центру отталкиванія на минимальное разстояніе

(въ моментъ $t=\lambda$) и затѣмъ съ возрастающею скоростью уходитъ на безконечность въ отрицательномъ направленіи оси x—овъ.

3) $\frac{x_0'^2}{k^2} - x_0^2 = 0.$

Здѣсь могутъ быть два случая или $x_0' - kx_0 = 0$, или $x_0' + kx_0 = 0$. Въ первомъ случаѣ по (12):

$$x = x_0 e^{k(t-t_0)};$$

точка уходитъ на безконечность съ возрастающею скоростью въ положительномъ направленіи оси x—овъ (x_0 одного знака съ $x_0' > 0$).

Во второмъ случаѣ по (12):

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)};$$

точка асимптотически приближается къ центру отталкиванія.

98. Прямолинейное движеніе подъ дѣйствіемъ силы, зависящей лишь отъ скорости. Когда сила зависитъ только отъ скорости, т. е.

$$X = f(x'),$$

тогда въ уравненіи:

$$mx'' = f(x'), \tag{15}$$

замѣняемъ x'' черезъ $\frac{dx'}{dt}$ и получаемъ:

$$\frac{mdx'}{f(x')} = dt,$$

откуда, интегрируя:

$$\int \frac{m\,dx'}{f(x')} = \varphi(x') = t + A, \tag{16}$$

гдѣ A произвольная постоянная. Допустимъ, что изъ этого уравненія мы съумѣемъ найти x' какъ функцію отъ $t + A$.

$$x' = \psi(t + A)$$

или иначе

$$dx = \psi(t + A)\,dt.$$

Интегрируя, найдемъ

$$x + B = \int \psi(t + A)\,dt = \Phi(t + A),$$

что и рѣшаетъ вопросъ.

Когда изъ (16) нельзя найти x' какъ явную функцію времени, можно поступить такъ; умножаемъ обѣ части уравненія (15) на $x'dt = dx$:

$$mx'x''dt = mx'dx' = f(x')\,dx,$$

или

$$\frac{mx'dx'}{f(x')} = dx,$$

откуда

$$\int \frac{mx'dx'}{f(x')} = \omega(x') = x + C, \tag{17}$$

гдѣ C произвольная постоянная. Пусть отсюда мы можемъ найти x', какъ явную функцію x:

$$x' = \frac{dx}{dt} = \lambda(x + C),$$

или

$$\frac{dx}{\lambda(x + C)} = dt.$$

Интегрируя, найдемъ:

$$\int \frac{dx}{\lambda(x + C)} = \Omega(x + C) = t + D,$$

уравненіе, опредѣляющіе x, какъ функцію времени и постоянныхъ произвольныхъ C и D.

Наконецъ, если уравненія (16) и (17) неразрѣшимы, то мы можемъ сохранить оба эти уравненія, такъ какъ второе опредѣляетъ x, какъ функцію отъ x', а первое даетъ зависимость x' отъ времени.

Примѣры: а) Прямолинейное движеніе тяжелой точки въ средѣ, сопротивляющейся пропорціонально первой степени скорости. Уравненіе движенія въ разсматриваемомъ случаѣ будетъ

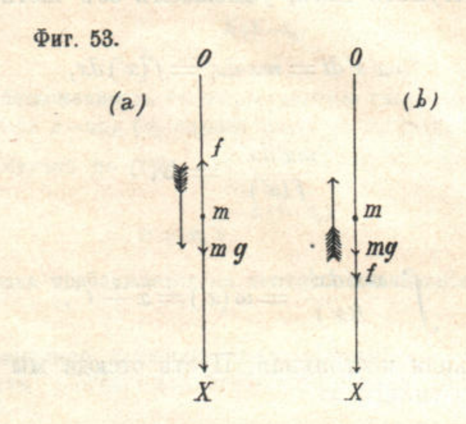
$$mx'' = mg + f\cos(fx); \tag{18}$$

ось x—овъ направлена вертикально книзу; g—ускореніе тяжести; f—сила сопротивленія. По условію сила сопротивленія пропорціональна первой степени скорости, слѣд.

$$f = \pm k^2 m x'. \tag{19}$$

если для удобства коеффиціентъ пропорціональности возьмемъ равнымъ $k^2 m$. Верхній знакъ надо взять, когда $x' > 0$, т. е. точка падаетъ внизъ (Фиг. 53 a),

Фиг. 53.



а нижній, когда $x' < 0$, т. е. точка брошена кверху (Фиг. 53 b). Но сила сопротивленія всегда противоположна направленію движенія точки, слѣд.

$$\cos(fx) = \mp 1, \tag{20}$$

гдѣ надо взять верхній знакъ, когда $x' > 0$ (Фиг. 53 a), и нижній, когда $x' < 0$ (Фиг. 53 b). Соединяя (19) и (20), найдемъ по (18) уравненіе:

$$x'' = g - k^2 x',$$

справедливое независимо отъ того, въ какомъ направленіи движется точка. Замѣтимъ, что уравненіе движенія сохранило бы свой видъ для двухъ направленій при всякой силѣ сопротивленія, пропорціональной **нечетной** степени скорости.

Полученному уравненію дадимъ видъ:

$$\frac{dx'}{g - k^2 x'} = dt,$$

откуда, интегрируя, имѣемъ:

$$\log(g - k^2 x') = -k^2 t + \log C,$$

или

$$g - k^2 x' = C e^{-k^2 t}.$$

Произвольную постоянную C опредѣлимъ изъ начальныхъ условій, полагая $t_0 = 0$:

$$C = g - k^2 x_0'.$$

А потому

$$x' = \frac{g}{k^2} - \left(\frac{g}{k^2} - x_0'\right) e^{-k^2 t}$$

и слѣдоват. послѣ интегрированія и опредѣленія произвольной постоянной найдемъ:

$$x = x_0 + \frac{g}{k^2}\,t + \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - x_0'\right)\left(e^{-k^2 t} - 1\right).$$

Движеніе асимптотически приближается къ равномѣрному со скоростью $\frac{g}{k^2}$, независящею отъ начальныхъ условій. Положеніе движущейся точки при t весьма большомъ мало отличается отъ того, которое она занимала бы, если бы, выйдя изъ начальнаго положенія $x = x_0 + \frac{x_0'}{k^2} - \frac{g}{k^4}$, двигалась равномѣрно со скоростью $\frac{g}{k^2}$.

б) Прямолинейное движеніе тяжелой точки въ средѣ, сопротивляющейся пропорціонально второй степени скорости. Направимъ ось x—овъ вертикально книзу. Тогда уравненіе движенія при обозначеніяхъ предъидущаго примѣра будетъ:

$$mx'' = mg + f \cos (fx).$$

Въ настоящемъ случаѣ $f = k^2 m x'^2$, если коеффиціентъ пропорціональности равенъ $k^2 m$. Что же касается до косинуса угла (fx), то по предъидущему:

$$\cos (fx) = \mp 1,$$

причемъ верхній знакъ надо взять для движенія внизъ, а нижній для движенія вверхъ. Такимъ образомъ мы получаемъ для движенія внизъ уравненіе:

$$x'' = g - k^2 x'^2, \tag{21}$$

а для движенія вверхъ:

$$x'' = g + k^2 x'^2. \tag{22}$$

Одно уравненіе переходитъ въ другое при помощи замѣны k черезъ $k\sqrt{-1}$.

Будемъ интегрировать уравненіе вида (21). Умножая обѣ части на dt, получимъ.

$$\frac{dx'}{g - k^2 x'^2} = dt,$$

или

$$\frac{k dx'}{\sqrt{g} + kx'} + \frac{k dx'}{\sqrt{g} - kx'} = 2k\sqrt{g} \,.\, dt,$$

откуда, интегрируя:

$$\log \frac{\sqrt{g} + kx'}{\sqrt{g} - kx'} = 2kt\sqrt{g} + \log C.$$

Полагая $t_0 = 0$, опредѣляемъ произвольную постоянную C:

$$C = \frac{\sqrt{g} + kx_0'}{\sqrt{g} - kx_0'};$$

слѣд. найденный первый интегралъ можно переписать такъ:

$$\frac{\sqrt{g} + kx'}{\sqrt{g} - kx'} = \frac{\sqrt{g} + kx_0'}{\sqrt{g} - kx_0'} e^{2kt\sqrt{g}}.$$

Рѣшая относительно x', имѣемъ:

$$x' = \frac{\sqrt{g}}{k} \frac{(\sqrt{g} + kx_0') e^{2kt\sqrt{g}} - (\sqrt{g} - kx_0')}{(\sqrt{g} + kx_0') e^{2kt\sqrt{g}} + (\sqrt{g} - kx_0')} =$$

$$= \frac{1}{k^2} \frac{d}{dt} \log \left\{ (\sqrt{g} + kx_0') e^{kt\sqrt{g}} + (\sqrt{g} - kx_0') e^{-kt\sqrt{g}} \right\}. \qquad (23)$$

Интегрируя, получаемъ:

$$x = B + \frac{1}{k^2} \log \left\{ (\sqrt{g} + kx_0') e^{kt\sqrt{g}} + (\sqrt{g} - kx_0') e^{-kt\sqrt{g}} \right\}.$$

Произвольная постоянная.

$$B = x_0 - \frac{1}{k^2} \log 2\sqrt{g}.$$

Поэтому

$$x = x_0 + \frac{1}{k^2} \log \left\{ \frac{1}{2} \left(e^{kt\sqrt{g}} + e^{-kt\sqrt{g}} \right) + \frac{k}{2\sqrt{g}} x_0' \left(e^{kt\sqrt{g}} - e^{-kt\sqrt{g}} \right) \right\}. \quad (24)$$

Изъ (23) видно, что движеніе асимптотически приближается къ равномѣрному со скоростью $\frac{\sqrt{g}}{k}$, независящею отъ начальныхъ условій.

Чтобы получить формулу для движенія снизу вверхъ, подставляемъ въ (24) вмѣсто k выраженіе $k\sqrt{-1}$; получаемъ:

$$x = x_0 - \frac{1}{k^2} \log \left\{ \cos (kt\sqrt{g}) - \frac{k}{\sqrt{g}} x_0' \sin (kt\sqrt{g}) \right\}. \quad (25)$$

Точка останавливается въ моментъ

$$\tau = \frac{1}{k\sqrt{g}} \operatorname{arc\,tg} \left(-\frac{kx_0'}{\sqrt{g}} \right)$$

и слѣд. съ этого момента надо пользоваться формулою (24), причемъ x_0 надо замѣнить значеніемъ правой части (25) для $t = \tau$, а x_0' положить равнымъ нулю.

в) Въ видѣ примѣра на второй пріемъ интегрированія уравненія движенія въ разсматриваемомъ случаѣ, рѣшимъ такую задачу: тяжелая точка брошена кверху съ начальною скоростью v_0 и движется въ средѣ, сопротивляющейся пропорціонально второй степени скорости; опредѣлить, съ какою скоростью точка вернется въ первоначальное положеніе.

Сначала движеніе происходитъ сообразно съ дифференціальнымъ уравненіемъ (22):

$$x'' = g + k^2 x'^2.$$

Представивъ его подъ видомъ:

$$\frac{2\,k^2 x' dx'}{g + k^2 x'^2} = 2\,k^2 dx,$$

интегрируемъ:

$$\log (g + k^2 x'^2) = 2\,k^2 x + \log C. \quad (26)$$

Если начало координатъ помѣстимъ въ начальномъ положеніи точки, т. е. положимъ $x_0 = 0$, то постоянная

$$C = g + k^2 v_0^2,$$

а потому вмѣсто (26):

$$g + k^2 x'^2 = (g + k^2 v_0^2)\, e^{2\,k^2 x}. \quad (27)$$

Координата той точки, въ которой движущаяся остановится, найдется изъ предъидущаго уравненія, полагая въ немъ $x'=0$. Искомая координата отрицательна. слѣд., если ее означимъ черезъ $-h$, h будетъ >0 и по (27):

$$e^{-2k^2h}=\frac{g}{g+k^2v_0^2}$$

или

$$e^{2k^2h}=1+\frac{k^2}{g}v_0^2. \tag{28}$$

Для движенія внизъ замѣняемъ въ (26) k^2 на $-k^2$:

$$log\,(g-k^2x'^2)=-2k^2x+log\,C.$$

Произвольную постоянную C находимъ, замѣчая, что $x_0=-h$, $x_0'=0$:

$$C=g\,.\,e^{-2k^2h}.$$

Слѣдовательно

$$g-k^2x'^2=g\,e^{-2k^2(h+x)}.$$

Скорость w, съ которою точка вернется въ начало координатъ, найдется, если въ предъидущемъ уравненіи положимъ $x=0$:

$$k^2w^2=g\left(1-e^{-2k^2h}\right)=g\,e^{-2k^2h}\left(e^{2k^2h}-1\right).$$

А пользуясь (28), находимъ окончательно:

$$w^2=v_0^2\,e^{-2k^2h}.$$

ГЛАВА XI.

Простѣйшіе случаи криволинейнаго движенія свободной матеріальной точки.

99. Криволинейное движеніе точки, сводящееся на задачу о нѣсколькихъ прямолинейныхъ движеніяхъ отдѣльныхъ точекъ. Если равнодѣйствующая силъ, приложенныхъ къ движущейся точкѣ такова, что

$$X = f_1(t, x, x');$$

$$Y = f_2(t, y, y');$$

$$Z = f_3(t, z, z');$$

то, очевидно, каждое изъ уравненій движенія:

$$mx'' = X = f_1(t, x, x');$$

$$my'' = Y = f_2(t, y, y');$$

$$mz'' = Z = f_3(t, z, z');$$

можетъ быть проинтегрировано независимо отъ другихъ, и слѣд., задача о движеніи разсматриваемой точки сводится къ рѣшенію трехъ задачъ о прямолинейномъ движеніи трехъ точекъ, проекцій движущейся точки на оси координатъ.

Простѣйшія изъ такихъ движеній и разсмотримъ въ настоящей главѣ.

100. Криволинейное движеніе тяжелой точки. Возьмемъ ось z—въ вертикально книзу, ускореніе тяжести означимъ g; тогда уравненія движенія будутъ:

$$mx'' = 0; \quad my'' = 0; \quad mz'' = mg.$$

Непосредственно интегрируя ихъ и опредѣляя произвольныя постоянныя, получимъ:

$$x = x_0 + x_0' (t - t_0);$$

$$y = y_0 + y_0' (t - t_0);$$

$$z = z_0 + z_0' (t - t_0) + \frac{g}{2} (t - t_0)^2.$$

Исключая время, находимъ уравненія траекторіи:

$$y - y_0 = \frac{y_0'}{x_0'} (x - x_0);$$

$$z - z_0 = \frac{z_0'}{x_0'} (x - x_0) + \frac{g}{2} \frac{(x - x_0)^2}{x_0'^2}.$$

Возьмемъ начало координатъ въ начальномъ положеніи ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$), плоскость zOx проведемъ черезъ направленіе начальной скорости ($y_0' = 0$), уголъ начальной скорости съ осью x-овъ (уголъ прицѣла) означимъ черезъ α, причемъ α считаемъ отъ оси x-овъ къ отрицательной оси z-овъ (кверху). Тогда предъидущія уравненія траекторіи примутъ видъ:

$$y = 0; \; z = -x\, tg\, \alpha + \frac{g}{2} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \tag{1}$$

Траекторіей служитъ вертикальная парабола съ вершиною кверху. Положимъ, что данная матеріальная точка представляетъ собою артиллерійскій снарядъ, движущійся въ безвоздушномъ пространствѣ; рѣшимъ такую задачу: найти уголъ прицѣла, подъ которымъ надо пустить снарядъ изъ начала координатъ съ данною начальною скоростью для того, чтобы онъ попалъ въ данную точку (ξ, ζ) плоскости zOx. Рѣшая уравненіе (1), находимъ для $tg\, \alpha$ два значенія:

$$tg\, \alpha = \frac{v_0^2}{g\xi} \pm \frac{1}{g\xi} \sqrt{2 g v_0^2 \left(\zeta - \frac{g\xi^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} \right)}.$$

Такимъ образомъ, мы можемъ по двумъ траекторіямъ (настильной и навѣсной) довести снарядъ до назначенной цѣли; но для того, чтобы задача была возможна, данная точка (ξ, ζ) должна лежать внутри параболы

$$\zeta - \frac{g\xi^2}{2v_0^2} + \frac{v_0^2}{2g} = 0. \tag{2}$$

Для точекъ, лежащихъ на этой параболѣ, обѣ траекторіи, настильная и навѣсная, сливаются въ одну.

101. Притяженіе точки неподвижнымъ центромъ прямопорціонально разстоянію. Помѣстимъ притягивающій центръ въ началѣ координатъ. Тогда, если положимъ

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

сила F, приложенная къ движущейся точкѣ, будетъ

$$F = k^2 mr .$$

Косинусы угловъ этой силы съ осями координатъ противоположны по знаку косинусамъ угловъ, образуемыхъ съ осями радіусомъ векторомъ движущейся точки, т. е.

$$cos\,(F\,x) = -\frac{x}{r}\,;\ cos\,(F\,y) = -\frac{y}{r}\,;\ cos\,(F\,z) = -\frac{z}{r}\,\cdot$$

Отсюда, по сокращеніи на m, получаемъ такія уравненія движенія:

$$x'' = -k^2 x;\ y'' = -k^2 y;\ z'' = -k^2 z.$$

Интегралъ перваго уравненія былъ уже нами найденъ въ видѣ формулы (8) главы X:

$$x = n\,sin\,(kt + \gamma), \tag{3}$$

гдѣ

$$n^2 = \frac{x_0'^2}{k^2} + x_0^2\,;\ \gamma = arc\,sin\frac{x_0}{n} - kt_0\,.$$

Иначе

$$x = n\,cos\,\gamma\,sin\,kt + n\,sin\,\gamma\,cos\,kt.$$

Полагаемъ $t_0 = 0$, тогда

$$sin\,\gamma = \frac{x_0}{n}\,;\ cos\,\gamma = \pm\frac{x_0'}{kn}\,;$$

и слѣдовательно

$$x = x_0\,cos\,kt + \frac{x_0'}{k}\,sin\,kt. \tag{4}$$

Изъ двойного знака при $\cos\gamma$ сохраняемъ лишь $+$, такъ какъ правая часть (4) послѣ дифференцированія по t должна дать намъ выраженіе для x', т. е. для $t=0$ обратиться въ x_0'.

По аналогіи съ (4) имѣемъ:

$$y = y_0 \cos kt + \frac{y_0'}{k} \sin kt$$

$$z = z_0 \cos kt + \frac{z_0'}{k} \sin kt. \tag{5}$$

Направимъ ось x-овъ черезъ начальное положеніе точки ($y_0 = z_0 = 0$), а плоскость xOy проведемъ черезъ направленіе начальной скорости ($z_0' = 0$), тогда уравненія (4) и (5) примутъ видъ:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{x_0'}{k} \sin kt;$$

$$y = \frac{y_0'}{k} \sin kt;$$

$$z = 0.$$

Послѣднее уравненіе показываетъ, что траекторія кривая плоская. Чтобы исключить время изъ первыхъ двухъ уравненій, находимъ значенія

$$\sin kt = \frac{yk}{y_0'};\quad \cos kt = \frac{1}{x_0}\left(x - \frac{yx_0'}{y_0'}\right);$$

возвышаемъ въ квадратъ и складываемъ:

$$\frac{y^2 k^2}{y_0'^2} + \frac{1}{x_0^2}\left(x - \frac{yx_0'}{y_0'}\right)^2 = 1.$$

Это уравненіе кривой второго порядка, отнесенное къ центру; составляя дискриминантъ, убѣждаемся, что онъ отрицателенъ:

$$4 \cdot \frac{x_0'^2}{y_0'^2 x_0^4} - \frac{4}{x_0^2}\left(\frac{x_0'^2}{y_0'^2 x_0^2} + \frac{k^2}{y_0'^2}\right) = -\frac{4k^2}{y_0'^2 x_0^2} < 0.$$

Такимъ образомъ траекторіею служитъ эллипсъ, центръ коего лежитъ въ притягивающемъ полюсѣ.

102. Отталкиваніе точки неподвижнымъ центромъ прямопропорціонально разстоянію. Беремъ опять начало координатъ въ центрѣ отталкиванія; тогда подобно тому, какъ это было сдѣлано въ предъидущемъ параграфѣ, приходимъ къ уравненіямъ:

$$x'' = k^2 x; \; y'' = k^2 y; \; z'' = k^2 z.$$

Интегралъ перваго уравненія мы уже имѣли въ формулѣ (12) главы X; для $t_0 = 0$:

$$x = \frac{1}{2}\left\{\left(x_0 + \frac{x_0'}{k}\right)e^{kt} + \left(x_0 - \frac{x_0'}{k}\right)e^{-kt}\right\}. \tag{6}$$

По аналогіи для другихъ координатъ:

$$y = \frac{1}{2}\left\{\left(y_0 + \frac{y_0'}{k}\right)e^{kt} + \left(y_0 - \frac{y_0'}{k}\right)e^{-kt}\right\};$$

$$z = \frac{1}{2}\left\{\left(z_0 + \frac{z_0'}{k}\right)e^{kt} + \left(z_0 - \frac{z_0'}{k}\right)e^{-kt}\right\}. \tag{7}$$

Проведемъ Ox черезъ начальное положеніе точки ($y_0 = z_0 = 0$), а плоскость xOy черезъ начальную скорость ($z_0' = 0$); тогда

$$x = \frac{1}{2}\left\{\left(x_0 + \frac{x_0'}{k}\right)e^{kt} + \left(x_0 - \frac{x_0'}{k}\right)e^{-kt}\right\};$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{y_0'}{k}\left(e^{kt} - e^{-kt}\right);$$

$$z = 0;$$

откуда, подобно предъидущему параграфу, легко убѣждаемся, что траекторіей служитъ гипербола съ центромъ въ отталкивающемъ центрѣ.

ГЛАВА XII.

Законъ моментовъ количества движенія. Законъ живой силы.

103. Законъ моментовъ количества движенія матеріальной точки. По второму закону Ньютона (§ 89) сила, дѣйствующая на матеріальную точку, представляетъ собою геометрическую производную отъ количества движенія точки. Если мы станемъ теперь разсматривать оба эти вектора—силу и количество движенія—какъ векторы, приложенные къ движущейся точкѣ, то по §§ 4 и 53 окажется, что приложенный къ движущейся точкѣ векторъ—сила представляетъ собою геометрическую производную отъ приложеннаго къ той же точкѣ вектора—количества движенія. Это можно видѣть и непосредственно. Возьмемъ за координаты приложеннаго вектора силы (§ 13) три проекціи ея на оси координатъ (R_x, R_y, R_z) и три момента ея вокругъ осей (L_x, L_y, L_z). Тогда

$$R_x = X;\ R_y = Y;\ R_z = Z;$$

$$L_x = Zy - Yz;\ L_y = Xz - Zx;\ L_z = Yx - Xy;$$

или по второму закону Ньютона:

$$R_x = mx'';\ R_y = my'';\ R_z = mz'';$$

$$L_x = m(yz'' - zy'');\ L_y = m(zx'' - xz'');\ L_z = m(xy'' - yx''). \qquad (1)$$

А для приложеннаго вектора—количества движенія (§ 86) имѣемъ слѣдующія координаты:

$$r_x = mx';\ r_y = my';\ r_z = mz';$$

$$l_x = m(yz' - zy');\ l_y = m(zx' - xz');\ l_z = m(xy' - yx'). \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), находимъ:

$$\frac{dr_x}{dt} = R_x; \quad \frac{dr_y}{dt} = R_y; \quad \frac{dr_z}{dt} = R_z;$$

$$\frac{dl_x}{dt} = L_x; \quad \frac{dl_y}{dt_y} = L_y; \quad \frac{dl_z}{dt} = L_z; \tag{3}$$

что и доказываетъ высказанное положенiе, такъ какъ начало координатъ по условiю точка неподвижная (§§ 35 и 36).

Послѣднiя три равенства (3) могутъ быть замѣнены однимъ геометрическимъ:

$$(\dot{l}) = (L) \tag{4}$$

гдѣ l и L моменты количества движенiя точки и равнодѣйствующей вокругъ начала координатъ.

Равенство (4) выражаетъ собою слѣдующую теорему, называемую **закономъ момента количества движенiя матерiальной точки**: геометрическая производная по времени отъ момента количества движенiя точки вокругъ неподвижнаго полюса (начала координатъ) геометрически равна моменту равнодѣйствующей силы вокругъ того же полюса.

Иначе эту теорему можно выразить такъ (§ 31): скорость точки, чертящей годографъ момента количества движенiя матерiальной точки вокругъ неподвижнаго полюса, геометрически равна моменту равнодѣйствующей силы вокругъ того-же полюса.

104. Секторiальная скорость матерiальной точки вокругъ оси. Выраженiямъ для моментовъ количества движенiя: l_x, l_y, l_z, можно дать форму, отличную отъ (2). Означимъ черезъ m_1 проекцiю движущейся точки $m\,(x, y, z)$ на плоскость yOz, радiусъ векторъ точки m_1 пусть будетъ ρ_1, а уголъ ρ_1 съ осью y-овъ — θ_1.

Тогда $y = \rho_1 \cos\theta_1$; $z = \rho_1 \sin\theta_1$; а потому

$$l_x = m(yz' - zy') = m\rho_1^2\,\theta'_1 = 2\,m\,S_x,$$

если подъ S_x мы разумѣемъ (§ 47) секторiальную скорость точки m_1 въ плоскости yOz или, какъ говорятъ короче, **секторiальную скорость** точки m **вокругъ** Ox. То же самое можно сдѣлать и по отношенiю къ другимъ осямъ, и слѣд. вмѣсто (3) можемъ написать

$$2m\frac{dS_x}{dt} = L_x; \quad 2m\frac{dS_y}{dt} = L_y; \quad 2m\frac{dS_z}{dt} = L_z. \tag{5}$$

105. Интегралъ площадей. Положимъ, что сила, приложенная къ матеріальной точкѣ, во все время движенія лежитъ съ нѣкоторою постоянною прямою въ одной плоскости.

Примемъ упомянутую прямую за ось z-овъ; тогда будемъ имѣть: $L_z = 0$, а слѣд. по (3) такой интегралъ

$$l_z = const.; \tag{6}$$

т. е. моментъ количества движенія вокругъ Oz постояненъ.

Иначе по (5):

$$S_z = const.; \tag{7}$$

т. е. секторіальная скорость движущейся точки вокругъ оси z-овъ постоянна. Поэтому-то первому интегралу движенія (6):

$$m(xy' - yx') = const.,$$

и даютъ названіе интеграла площадей.

106. Два интеграла площадей. Положимъ, что мы имѣемъ одновременно два интеграла площадей, т. е., что

$$L_x = Zy - Yz = 0; \; L_y = Xz - Zx = 0.$$

Но тогда изъ перваго равенства слѣдуетъ

$$\frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

а изъ второго

$$\frac{X}{x} = \frac{Z}{z},$$

и слѣдовательно

$$\frac{Y}{y} = \frac{X}{x},$$

т. е.

$$Yx - Xy = L_z = 0;$$

и къ двумъ даннымъ интеграламъ площадей

$$l_x = C_1, \; l_y = C_2; \tag{8}$$

присоединяется третій

$$l_z = C_3,$$

гдѣ C_1, C_2, C_3 произвольныя постоянныя.

Заключенія наши несправедливы лишь тогда, когда одновременно

$$Z = 0,\ z = 0;$$

но въ такомъ случаѣ интегралы (8):

$$m(yz' - zy') = C_1;\ m(zx' - xz') = C_2;$$

обращаются въ тождества вида $0 = 0\ (z = z' = 0,\ C_1 = C_2 = 0)$.

Отсюда выводимъ, что интеграловъ площадей или одинъ, или три, или ни одного.

107. Три интеграла площадей. Пусть во все время движенія

$$L_x = L_y = L_z = 0;$$

или

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}.$$

Эти равенства показываютъ, что направленіе равнодѣйствующей силы постоянно проходитъ черезъ неподвижный полюсъ— начало координатъ. Тогда имѣемъ одновременно три интеграла площадей:

$$\begin{aligned} l_x &= m(yz' - zy') = C_1; \\ l_y &= m(zx' - xz') = C_2; \\ l_z &= m(xy' - yx') = C_3. \end{aligned} \tag{9}$$

Написанныя равенства выражаютъ собою (§ 10), что моментъ количества движенія точки вокругъ начала координатъ постояненъ по величинѣ и направленію. Величина этого момента

$$l = +\sqrt{C_1{}^2 + C_2{}^2 + C_3{}^2}. \tag{10}$$

Иначе по (5) интегралы (9) показываютъ, что секторіальныя скорости точки вокругъ трехъ координатныхъ осей постоянны:

$$S_x = \frac{1}{2m} C_1;\ S_y = \frac{1}{2m} C_2;\ S_z = \frac{1}{2m} C_3. \tag{11}$$

Проведемъ черезъ начало координатъ какую-либо ось U, образующую съ осями углы, косинусы которыхъ пусть α, β, γ. Тогда (§ 10) моментъ количества движенія точки около этой оси U:

$$L_u = l\cos(l, u) = l_x \alpha + l_y \beta + l_z \gamma = C_1 \alpha + C_2 \beta + C_3 \gamma = const.,$$

слѣд. секторіальная скорость движущейся точки вокругъ любой оси, проходящей черезъ начало координатъ, постоянна. Наибольшую секторіальную скорость будетъ имѣть точка вокругъ оси, совпадающей по направленію съ l. Величина этой максимальной скорости по (10) и (11) слѣдующая:

$$\frac{1}{2m}\sqrt{C_1^2+C_2^2+C_3^2}.$$

Наименьшей секторіальной скорости, равной нулю, соотвѣтствуютъ оси, лежащія въ плоскости перпендикулярной къ направленію l.

Въ разсматриваемомъ случаѣ легко получить и второй интегралъ движенія (безъ скоростей). Умножаемъ равенства (9) соотвѣтственно на x, y, z и складываемъ; получаемъ:

$$C_1x+C_2y+C_3z=0, \tag{12}$$

уравненіе плоскости траекторіи или орбиты движущейся точки. Изъ уравненія видимъ, что нормаль къ плоскости орбиты параллельна вектору l, а слѣд. сама плоскость служитъ геометрическимъ мѣстомъ осей съ секторіальною скоростью, равною нулю, что очевидно само собою.

108. Законъ живой силы. Возьмемъ уравненія движенія (1) главы IX:

$$mx''=X;\ my''=Y;\ mz''=Z;$$

умножимъ ихъ соотвѣтственно на

$$x'dt=dx;\ y'dt=dy;\ z'dt=dz;$$

и сложимъ:

$$m(x'x''dt+y'y''dt+z'z''dt)=m(x'dx'+y'dy'+z'dz')=$$
$$=Xdx+Ydy+Zdz, \tag{13}$$

Лѣвая часть представляетъ собою полный дифференціалъ отъ величины

$$T=\frac{m}{2}(x'^2+y'^2+z'^2)=\frac{m}{2}v^2;$$

если черезъ v означимъ скорость точки.

Количество T, т. е. произведеніе изъ массы матеріальной точки на половину квадрата ея скорости, называется живою

силою матеріальной точки или кинетической энергіею точки.

Замѣтимъ, что съ одной стороны:

$$X = F\cos(Fx);\ Y = F\cos(Fy);\ Z = F\cos(Fz),$$

гдѣ F сила, приложенная къ матеріальной точкѣ; а съ другой стороны:

$$dx = ds\cos(ds, x);\ dy = ds\cos(ds, y);\ dz = ds\cos(ds, z);$$

если ds элементъ траекторіи или элементарное перемѣщеніе движущейся точки. Поэтому правой части равенства (13) можемъ дать видъ:

$$Xdx + Ydy + Zdz = Fds\cos(F, ds).$$

Произведеніе изъ силы на элементарное перемѣщеніе точки ея приложенія и на косинусъ угла между этими двумя векторами носитъ названіе **работы силы на элементарномъ перемѣщеніи** или, короче, **элементарной работы силы.**

Такимъ образомъ равенство (13) принимаетъ теперь видъ:

$$dT = F\,ds\cos(F, ds) \qquad (14)$$

и опредѣляетъ собою такъ называемый **законъ живой силы:** элементарное приращеніе живой силы матеріальной точки равно работѣ равнодѣйствующей силы на соотвѣтственномъ перемѣщеніи.

Если написанное равенство (14) проинтегрируемъ между какими-нибудь двумя моментами t_0 и t, то законъ живой силы можемъ выразить такъ:

$$\int_{t_0}^{t} dT = T - T_0 = \int_{t_0}^{t} F\,ds\cos(F, ds), \qquad (15)$$

гдѣ T и T_0 живыя силы точки въ моменты t и t_0; т. е. словами: приращеніе живой силы за промежутокъ времени $t - t_0$ равняется работѣ равнодѣйствующей за тотъ-же промежутокъ. Подъ **работой** равнодѣйствующей за какой либо промежутокъ времени разумѣется **сумма элементарныхъ работъ** ея за это время.

Единицею работы, а слѣд. по (15) и единицею живой силы служитъ **эргъ.** Зависимость эрга отъ основныхъ единицъ слѣдующая:

$$\text{эргъ} = (\text{дина}).(\text{сантим.}) = \frac{(\text{граммъ})\,(\text{сантим.})^2}{(\text{сек. средн. врем.})^2}.$$

109. Интегралъ живой силы. Функція силовая. Функція потенціальная. Положимъ, что сила, дѣйствующая на матеріальную точку, такова, что проекціи ея на координатныя оси могутъ быть представлены, какъ частныя производныя по соотвѣтственнымъ координатамъ отъ нѣкоторой функціи U, называемой тогда силовою; т. е. пусть

$$X=\frac{\partial U}{\partial x};\ Y=\frac{\partial U}{\partial y};\ Z=\frac{\partial U}{\partial z}; \tag{16}$$

и слѣд. между проекціями X, Y, Z существуютъ три зависимости:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=\frac{\partial Y}{\partial x};\ \frac{\partial Y}{\partial z}=\frac{\partial Z}{\partial y};\ \frac{\partial Z}{\partial x}=\frac{\partial X}{\partial z}; \tag{17}$$

при томъ, конечно, выраженія X, Y, Z не должны заключать въ себѣ ни времени, ни скоростей (x', y', z'). Тогда равенство (13) принимаетъ видъ:

$$dT=\frac{\partial U}{\partial x}dx+\frac{\partial U}{\partial y}dy+\frac{\partial U}{\partial z}dz=dU;$$

и приводитъ къ первому интегралу движенія, называемому интеграломъ живой силы:

$$T-U=h, \tag{18}$$

гдѣ h произвольная постоянная.

Вмѣсто силовой функціи U можно разсматривать функцію потенціальную Π, такъ связанную съ силовою

$$\Pi=-U.$$

Поэтому о силахъ, выполняющихъ условія (17), говорятъ, что эти силы имѣютъ потенціалъ. Функцію Π называютъ также потенціальною энергіею точки, а сумму $T+\Pi$ кинетической и потенціальной энергіи—полною энергіею точки. Тогда интегралъ живой силы:

$$T+\Pi=h$$

выражаетъ собою постоянство энергіи точки.

Замѣтимъ, что работа силъ, имѣющихъ потенціалъ, зависитъ лишь отъ начальнаго и конечнаго положенія матеріальной точки и вовсе не зависитъ отъ промежуточныхъ ея положеній; дѣйствительно, тогда

$$\int_{t_0}^{t}(Xdx+Ydy+Zdz)=\int_{t_0}^{t}dU=U(x,y,z)-U(x_0,y_0,z_0);$$

если (x,y,z) и (x_0,y_0,z_0) положенія движущейся точки въ моменты t и t_0.

Кромѣ того изъ (18) видимъ, что всякій разъ, когда точка проходитъ черезъ какое нибудь произвольно выбранное положеніе, она имѣетъ въ немъ одну и ту же живую силу.

110. Силы, имѣющія своимъ источникомъ неподвижные центры и зависящія лишь отъ разстоянія. Самымъ важнымъ примѣромъ силъ, имѣющихъ потенціалъ, служатъ силы притяженія или отталкиванія отъ неподвижныхъ центровъ пропорціонально нѣкоторой функціи разстоянія.

Пусть неподвижный центръ m_i занимаетъ положеніе a_i, b_i, c_i и отталкиваетъ матеріальную точку m (масса ея равна единицѣ, одному грамму), находящуюся отъ него въ разстояніи ρ_i съ силою $f_i=\varphi_i(\rho_i)$, гдѣ

$$\rho_i=+\sqrt{(x-a_i)^2+(y-b_i)^2+(z-c_i)^2}. \tag{19}$$

Тогда проекціи силы, приложенной къ m, будутъ:

$$X_i=\varphi_i(\rho_i)\frac{x-a_i}{\rho_i};\ Y_i=\varphi_i(\rho_i)\frac{y-b_i}{\rho_i};\ Z_i=\varphi_i(\rho_i)\frac{z-c_i}{\rho_i}; \tag{20}$$

такъ какъ направленіе силы идетъ отъ m_i къ m. Если бы центръ m_i не отталкивалъ, а притягивалъ, то проекціи силы приняли бы видъ:

$$X_i=\varphi_i(\rho_i)\frac{a_i-x}{\rho_i};\ Y_i=\varphi_i(\rho_i)\frac{b_i-y}{\rho_i};\ Z_i=\varphi_i(\rho_i)\frac{c_i-z}{\rho_i};$$

такъ какъ тогда направленіе силы шло бы отъ m къ m_i. Сравнивая съ (20), видимъ, что одни выраженія получаются изъ другихъ замѣной φ_i на $-\varphi_i$. Поэтому, чтобы соблюсти однообразіе въ обозначеніи, условимся для силъ притягательныхъ брать при φ_i знакъ минусъ, наприм., для закона Ньютонова притяженія $\varphi_i=-\frac{k^2m_i}{\rho_i^2}$. Тогда формула (20) сохранитъ свой общій характеръ какъ для силъ отталкивательныхъ, такъ и для притягательныхъ.

Если центровъ, подобныхъ m_i, всего n, то равнодѣйствующая, приложенная къ m, имѣетъ своими проекціями на оси:

$$X=\sum_{i=1}^{n} X_i=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\rho_i)\frac{x-a_i}{\rho_i};\quad Y=\sum_{i=1}^{n} Y_i=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\rho_i)\frac{y-b_i}{\rho_i};$$

$$Z=\sum_{i=1}^{n} Z_i=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\rho_i)\frac{z-c_i}{\rho_i}.$$

Отсюда для элементарной работы равнодѣйствующей получаемъ выраженіе:

$$Xdx+Ydy+Zdz=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\rho_i)\cdot\frac{1}{\rho_i}\{(x-a_i)\,dx+(y-b_i)\,dy+(z-c_i)\,dz\}.$$

Но, дифференцируя (19), находимъ:

$$(x-a_i)\,dx+(y-b_i)\,dy+(z-c_i)\,dz=\rho_i d\rho_i.$$

Слѣдовательно,

$$Xdx+Ydy+Zdz=dU=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(\rho_i)\,d\rho_i.$$

Если теперь неопредѣленный интегралъ $\int\varphi_i(\rho_i)\,d\rho_i$ означимъ черезъ $\Phi_i(\rho_i)$, то очевидно

$$dU=\sum_{i=1}^{n}d\Phi_i,$$

а потому

$$U=\sum_{i=1}^{n}\Phi_i. \tag{21}$$

Произвольной постоянной мы не прибавляемъ, такъ какъ она не имѣетъ никакого существеннаго значенія.

Если всѣ центры притягиваютъ по Ньютонову закону, то по вышесказанному

$$\varphi_i(\rho_i) = -\frac{k^2 m_i}{\rho_i^2};$$

слѣд.

$$\Phi_i = -\int \frac{k^2 m_i}{\rho_i^2}\, d\rho_i = \frac{k^2 m_i}{\rho_i}$$

и

$$U = \sum_{i=1}^{n} \frac{k^2 m_i}{\rho_i} \tag{22}$$

Если центры притягиваютъ прямопропорціонально разстоянію, то

$$\varphi_i(\rho_i) = -k^2 m_i \rho_i,$$

слѣд.

$$\Phi_i = -\int k^2 m_i \rho_i d\rho_i = -\frac{k^2}{2} m_i \rho_i^2. \tag{23}$$

Для такой же силы отталкивательной нашли бы

$$\Phi_i = +\frac{k^2}{2} m_i \rho_i^2. \tag{24}$$

Какъ другой примѣръ возьмемъ силу постоянную:

$$X = a;\ Y = b;\ Z = c;$$

гдѣ a, b, c постоянныя. Тогда, очевидно,

$$U = ax + by + cz.$$

111. Функція точки. Поверхности уровня. Градіентъ или дифференціальный параметръ перваго порядка. Функція силовая и потенціальная для матеріальной точки принадлежатъ къ числу такъ называемыхъ функцій точки, т. е. функцій, значенія которыхъ зависятъ отъ трехъ координатъ или, короче, отъ положенія точки. Такимъ образомъ, если намъ дана какая-либо функція точки: $u = \varphi(x, y, z)$, то каждой точкѣ пространства соотвѣтствуетъ свое

значеніе функціи. Та область или тѣ области пространства, въ которыхъ лежатъ точки, дающія функціи φ вещественныя и конечныя значенія, называются полемъ функціи; такъ напр. для функціи $\varphi = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2}$ полемъ служитъ объемъ шара радіуса равнаго R съ центромъ въ началѣ координатъ.

Геометрическимъ мѣстомъ точекъ, для которыхъ функція φ принимаетъ одно и тоже значеніе C, служитъ поверхность:

$$\varphi(x, y, z) = C, \tag{25}$$

называемая поверхностью уровня для данной функціи φ. Все поле можетъ быть заполнено сплошнымъ рядомъ безконечно-близкихъ другъ къ другу поверхностей уровня.

Въ каждой точкѣ поля можно построить векторъ, тѣсно связанный съ данною функціей, а именно векторъ съ такими проекціями на координатныя оси:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Этотъ векторъ носитъ названіе градіента или дифференціальнаго параметра перваго порядка отъ данной функціи φ; мы будемъ обозначать его черезъ $\Delta\varphi$; тогда по сказанному:

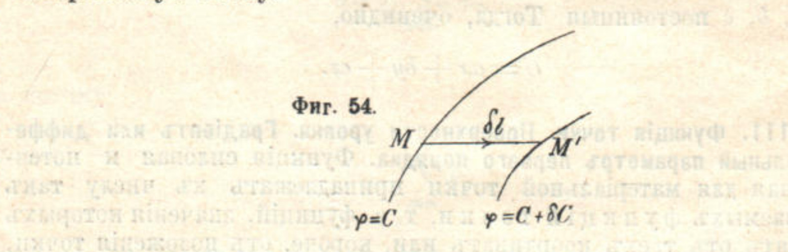
$$\Delta\varphi \cos(\Delta\varphi, x) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}; \; \Delta\varphi \cos(\Delta\varphi, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial y}; \; \Delta\varphi \cos(\Delta\varphi, z) = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \tag{26}$$

Отсюда видимъ, что величина градіента такова:

$$\Delta\varphi = +\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}; \tag{27}$$

а направленіе его совпадаетъ съ положительнымъ направленіемъ нормали къ поверхности уровня, проходящей черезъ разсматриваемую точку.

Фиг. 54.



Если построить семейство поверхностей уровня для различныхъ значеній параметра C, то нетрудно видѣть, что направленіе

градіента идетъ въ ту сторону, въ которую параметры C поверхностей уровня возрастаютъ. Возьмемъ (Фиг. 54) двѣ точки $M(x, y, z)$ и $M'(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$; пусть черезъ M проходитъ поверхность уровня: $\varphi = C$, а черезъ M' поверхность: $\varphi = C + \delta C$; слѣдовательно

$$\varphi(x, y, z) = C; \ \varphi(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z) = C + \delta C.$$

Но

$$C + \delta C = \varphi(x, y, z) + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\delta z + \ldots,$$

Строка Тейлора

откуда пользуясь первымъ изъ предъидущихъ равенствъ, находимъ:

$$\delta C = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\delta y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\delta z.$$

Означимъ длину вектора MM' черезъ δl, тогда

$$\delta x = \delta l \cos(\delta l, x); \ \delta y = \delta l \cos(\delta l, y); \ \delta z = \delta l \cos(\delta l, z);$$

а потому изъ (26)

$$\delta C = \Delta\varphi \,.\, \delta l \cos(\Delta\varphi, \delta l).$$

Знакъ правой части зависитъ лишь отъ знака косинуса, такъ какъ остальныя величины существенно положительныя; отсюда заключаемъ, что при углѣ $(\Delta\varphi, \delta l)$ остромъ $\delta C > 0$, что и доказываетъ вышесказанное.

112. Теорема лорда Кельвина. Пусть δl совпадаетъ съ $\Delta\varphi$; тогда

$$\Delta\varphi = \frac{\delta C}{\delta l}.$$

Станемъ семейство поверхностей уровня строить такъ, чтобы параметры ихъ возрастали всегда на одну и ту же величину, т. е. допустимъ, что $\delta C = const.$; тогда изъ предъидущаго вытекаетъ:

$$\Delta\varphi = \frac{const.}{\delta l}.$$

Оказывается, что при такомъ способѣ построенія поверхностей уровня величины дифференціальныхъ параметровъ перваго порядка обратнопропорціональны разстоянію δl между смежными поверхностями (теорема лорда Кельвина).

Если построимъ семейство кривыхъ, ортогональныхъ къ поверхностямъ уровня, то по (26) касательныя къ этимъ кривымъ опредѣлятъ собою направленіе градіента. Дифференціальныя уравненія разсматриваемыхъ кривыхъ, очевидно, будутъ:

$$\frac{dx}{\frac{d\varphi}{dx}} = \frac{dy}{\frac{d\varphi}{dy}} = \frac{dz}{\frac{d\varphi}{dz}}. \qquad (28)$$

113. Производная отъ функціи точки по данному направленію. Проведемъ черезъ взятую точку $M(x, y, z)$ какое нибудь направленіе, характеризуемое своими косинусами α, β, γ; возьмемъ другую точку $M'(x+\delta x, y+\delta y, z+\delta z)$, лежащую на построенной прямой и отстоящую отъ M на безконечно маломъ разстояніи δl.

Если M не принадлежитъ къ числу особенныхъ точекъ функціи φ, то значеніе φ для M': $\varphi+\delta\varphi$, будетъ безконечно мало отличаться отъ значенія этой функціи въ M. Разсмотримъ предѣлъ отношенія

$$\frac{\delta\varphi}{\delta l},$$

въ томъ предположеніи, что M' сливается съ M. Замѣтимъ, что

изъ строки Тейлора

$$\delta\varphi = \frac{d\varphi}{dx}\delta x + \frac{d\varphi}{dy}\delta y + \frac{d\varphi}{dz}\delta z,$$

гдѣ

$$\delta x = \alpha\,\delta l;\ \delta y = \beta\,\delta l;\ \delta z = \gamma\,\delta l.$$

А потому,

$$\text{пред.}\left(\frac{\delta\varphi}{\delta l}\right)_{\delta l = 0} = \frac{d\varphi}{dx}\alpha + \frac{d\varphi}{dy}\beta + \frac{d\varphi}{dz}\gamma.$$

Предѣлъ этотъ и носитъ названіе значенія для точки M производной отъ функціи φ по направленію l. Производную, взятую такимъ образомъ, обозначаютъ $\frac{d\varphi}{dl}$, слѣд.

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{d\varphi}{dx}\alpha + \frac{d\varphi}{dy}\beta + \frac{d\varphi}{dz}\gamma. \qquad (29)$$

На основаніи сказаннаго величину градіента, мы можемъ опредѣлить, какъ производную отъ данной функціи по направле-

ніе положительной нормали n къ соотвѣтственной поверхности уровня. Въ самомъ дѣлѣ, тогда

$$\frac{d\varphi}{dn}=\sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2}=\Delta\varphi,$$

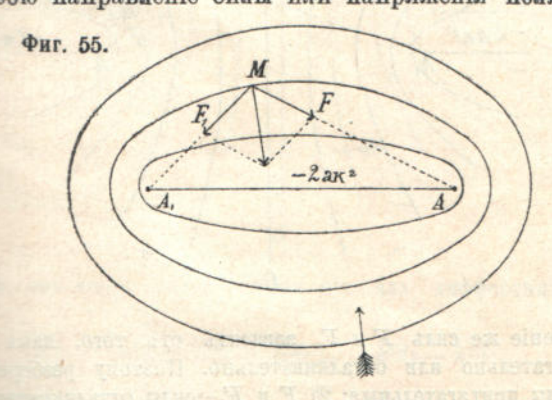
такъ какъ въ выраженіи (29) надо положить:

$$\alpha=\frac{1}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x};\ \beta=\frac{1}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y};\ \gamma=\frac{1}{\Delta\varphi}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

114. Свойства силовой функціи, какъ функціи точки. Приложимъ все сказанное въ предъидущихъ параграфахъ къ силовой функціи. Градіентъ силовой функціи представитъ собою равнодѣйствующую силу, которая была бы приложена къ движущейся точкѣ, если бы эта точка занимала разсматриваемое положеніе. Когда масса движущейся точки равна единицѣ (грамму), то равнодѣйствующую называютъ напряженіемъ поля въ разсматриваемой точкѣ. Иначе, напряженіе поля равно производной отъ силовой функціи по направленію положительной нормали къ соотвѣтственной поверхности уровня. Производная отъ силовой функціи по какому либо направленію равна проекціи на это направленіе напряженія поля. Когда построено семейство поверхностей уровня съ равномѣрно возрастающими параметрами, то по теоремѣ лорда Кельвина (§ 112) напряженіе поля тамъ больше, гдѣ поверхности уровня гуще, тѣснѣе расположены другъ относительно друга.

Кривыя (28) носятъ въ этомъ случаѣ названіе силовыхъ линій, такъ какъ по предъидущему, касательныя къ нимъ опредѣляютъ собою направленіе силы или напряженія поля.

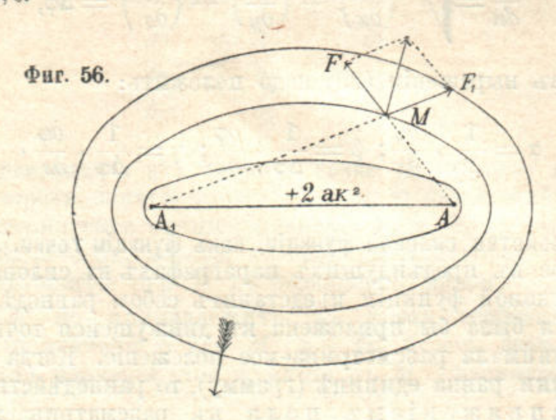
Фиг. 55.



Примѣръ: Разсмотримъ расположеніе поверхностей уровня для двухъ равныхъ силъ, постоянныхъ по величинѣ, имѣющихъ своими источниками

неподвижные центры. Возьмемъ за начало координатъ середину разстоянія между центрами A и A_1 (Фиг. 55, 56, 57 и 58) и примемъ эту прямую за ось x—овъ. Тогда, если $AA_1 = 2a$, координатами центровъ будутъ для A: $a, 0, 0$; для A_1: $-a, 0, 0$.

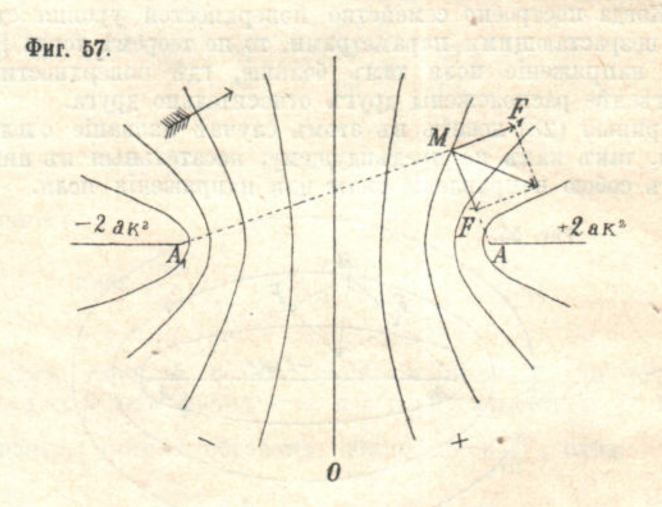
Фиг. 56.



На точку m массы, равной единицѣ, помѣщенную въ положеніе (x, y, z), дѣйствуютъ двѣ силы F и F_1, равныя по условію между собою:

$$F = F_1 = k^2.$$

Фиг. 57.



Направленіе же силъ F и F_1 зависитъ отъ того, какъ дѣйствуютъ центры притягательно или отталкивательно. Поэтому разберемъ 4 случая: 1) F и F_1—силы притягательныя; 2) F и F_1—силы отталкивательныя; 3) F—сила притягательная, F_1—отталкивательная; 4) F—сила отталкивательная, F_1—притягательная.

Въ первомъ случаѣ, очевидно, имѣемъ:

$$\cos(F, x) = -\frac{x-a}{\rho};\ \cos(F, y) = -\frac{y}{\rho};\ \cos(F, z) = -\frac{z}{\rho};$$

$$\cos(F_1, x) = -\frac{x+a}{\rho_1};\ \cos(F_1, y) = -\frac{y}{\rho_1};\ \cos(F_1, z) = -\frac{z}{\rho_1};$$

гдѣ $\rho = MA$, $\rho_1 = MA_1$, т. е.

$$\rho^2 = (x-a)^2 + y^2 + z^2;\ \rho_1{}^2 = (x+a)^2 + y^2 + z^2.$$

Слѣд. проекціи напряженія поля на координатныя оси будутъ:

$$X = -k^2\frac{x-a}{\rho} - k^2\frac{x+a}{\rho_1};$$

$$Y = -k^2\frac{y}{\rho} - k^2\frac{y}{\rho_1};$$

$$Z = -k^2\frac{z}{\rho} - k^2\frac{z}{\rho_1}.$$

Фиг. 58.

Отсюда вытекаетъ такое выраженіе для дифференціала силовой функціи:

$$dU = Xdx + Ydy + Zdz = -k^2 d\rho - k^2 d\rho_1,$$

слѣдовательно въ первомъ случаѣ:

$$U = -k^2(\rho + \rho_1). \qquad (30)$$

Подобнымъ образомъ найдемъ для второго случая:

$$U = k^2(\rho + \rho_1); \tag{31}$$

для третьяго:

$$U = k^2(\rho_1 - \rho); \tag{32}$$

и для четвертаго:

$$U = k^2(\rho - \rho_1); \tag{33}$$

Поверхностями уровня въ первыхъ двухъ случаяхъ служатъ софокусныя эллипсоиды вращенія вокругъ прямой AA_1. Фокусы совпадаютъ съ дѣйствующими центрами. Въ первомъ случаѣ параметры поверхностей уровня измѣняются отъ $-\infty$ (безконечно большая сфера) до $-2ak^2$ (отрѣзокъ AA_1); во второмъ случаѣ предѣлами для параметровъ служатъ $2ak^2$ (отрѣзокъ AA_1) и $+\infty$ (безконечно большая сфера).

Въ послѣднихъ двухъ случаяхъ поверхностями служатъ софокусные двуполые гиперболоиды вращенія вокругъ оси AA_1, причемъ каждой полѣ поверхности соотвѣтствуетъ свой параметръ. Въ обоихъ случаяхъ параметры измѣняются между $-2ak^2$ и $+2ak^2$. Параметру 0 соотвѣтствуетъ плоскость, перпендикулярная къ AA_1 и дѣлящая AA_1 пополамъ. Предѣльному значенію параметра $2ak^2$ въ третьемъ случаѣ соотвѣтствуетъ отрѣзокъ оси x-овъ, идущій отъ A къ $+\infty$, а въ четвертомъ случаѣ отрѣзокъ оси x-овъ, идущій отъ A_1 къ $-\infty$. Значенію параметра $-2ak^2$ въ третьемъ случаѣ соотвѣтствуетъ отрѣзокъ отъ A_1 до $-\infty$, а въ четвертомъ отъ A до $+\infty$.

На Фиг. 55, 56, 57 и 58 изображены меридіанальныя сѣченія разсмотрѣнныхъ поверхностей плоскостью AA_1M. Стрѣлкою указано направленіе, въ которомъ параметры поверхностей уровня возрастаютъ.

Силовыми линіями въ разобранныхъ примѣрахъ будутъ кривыя второго порядка, софокусныя съ меридіанами поверхностей уровня и, конечно, лежащія въ одной и той же меридіанальной плоскости.

ГЛАВА XIII.

Центральныя орбиты.

115. Движеніе точки подъ дѣйствіемъ центральной силы, функціи отъ разстоянія. Сила, имѣющая своимъ источникомъ неподвижный центръ, носитъ названіе центральной. Для матеріальной точки, движущейся подъ дѣйствіемъ центральной силы, мы можемъ всегда написать три первыхъ интеграла (§ 107): интегралы площадей. Они выражаютъ постоянство секторіальной скорости точки вокругъ трехъ взаимно ортогональныхъ осей, проведенныхъ черезъ дѣйствующій центръ. Такъ, если центръ помѣщенъ въ началѣ координатъ и радіусъ-векторъ движущейся точки (x, y, z) съ массою m означимъ ρ, то дифференціальныя уравненія движенія будутъ:

$$mx'' = X = F\frac{x}{\rho}; \; my'' = Y = F\frac{y}{\rho}; \; mz'' = Z = F\frac{z}{\rho},$$

гдѣ F величина центральной силы. Отсюда видимъ, что

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

и слѣдовательно

$$m(yz' - zy') = C_1; \; m(zx' - xz') = C_2; \; m(xy' - yx') = C_3; \quad (1)$$

$$C_1x + C_2y + C_3z = 0. \quad (2)$$

Легко опредѣлить значеніе произвольныхъ постоянныхъ C_1, C_2, C_3. Равенство (2) служитъ уравненіемъ плоскости траекторіи точки или орбиты, слѣд. выраженіе

$$\frac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}$$

равно косинусу угла наклоненія плоскости орбиты къ плоскости xOy. Положимъ въ уравненіи (2) z равнымъ нулю, тогда получимъ:

$$C_1 x + C_2 y = 0,$$

уравненіе прямой, слѣда плоскости орбиты на плоскости xOy. Эту линію обыкновенно называютъ въ Астрономіи линіею узловъ. Изъ написаннаго уравненія вытекаетъ, что

$$-\frac{C_1}{C_2} = tg\,\lambda,$$

гдѣ λ уголъ узловой линіи съ нѣкоторымъ постояннымъ направленіемъ въ плоскости xOy (осью x-овъ). Наконецъ максимальная секторіальная скорость равна моменту количества движенія точки вокругъ центра, раздѣленному на массу, т. е.

$$\frac{1}{m}\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} = v_0\, \rho_0 \sin(v_0, \rho_0),$$

если v_0 начальная скорость точки, а ρ_0—начальный радіусъ векторъ.

Такъ какъ движеніе плоское, то отнесемъ положеніе точки къ полярнымъ координатамъ ρ, θ въ плоскости орбиты. Тогда имѣемъ:

$$\rho^2\theta' = A = \frac{1}{m}\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} = v_0\, \rho_0 \sin(v_0,\ \rho_0). \qquad (3)$$

Если центральная сила функція только разстоянія между движущеюся точкою и центромъ, вопросъ о движеніи точки рѣшается съ помощью двухъ квадратуръ. Дѣйствительно, пусть

$$F = mf(\rho),$$

въ такомъ случаѣ, означивъ $\int f(\rho)\, d\rho$ черезъ $\Phi(\rho)$, находимъ (§ 111):

$$U = m\, \Phi(\rho),$$

и слѣд. получаемъ интегралъ живой силы:

$$\rho'^2 + \rho^2\theta'^2 = 2\Phi(\rho) + 2h, \qquad (4)$$

гдѣ $h = C_4$, четвертой произвольной постоянной.

Исключивъ время изъ (3) и (4), найдемъ дифференціальное уравненіе траекторіи. Съ этою цѣлью замѣчаемъ, что

$$\rho' = \frac{d\rho}{d\theta}\,\theta',$$

и замѣняемъ вездѣ θ' его значеніемъ изъ (3), тогда (4) намъ даетъ:

$$\frac{A^2}{\rho^4}\frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \frac{A^2}{\rho^2} = 2\Phi(\rho) + 2h. \tag{5}$$

или

$$\frac{A\,d\rho}{\rho^2\sqrt{2\Phi(\rho) + 2h - \frac{A^2}{\rho^2}}} = d\theta.$$

Отсюда, интегрируя, находимъ уравненіе траекторіи

$$\int \frac{A\,d\rho}{\rho^2\sqrt{2\Phi(\rho) + 2h - \frac{A^2}{\rho^2}}} = \theta + C_5\,.$$

Возвращаясь къ (3), получаемъ:

$$\frac{d\rho}{\sqrt{2\Phi(\rho) + 2h - \frac{A^2}{\rho^2}}} = dt,$$

или

$$\int \frac{d\rho}{\sqrt{2\Phi(\rho) + 2h - \frac{A^2}{\rho^2}}} = t + C_6,$$

зависимость ρ отъ времени, что и заканчиваетъ интегрированіе.

116. Движеніе подъ дѣйствіемъ притяженія по Ньютонову закону. Пусть сила F притягательная и обратнопропорціональная квадрату разстоянія. Тогда по условію, сдѣланному въ § 111:

$$F = -\frac{k^2 m}{\rho^2},$$

и слѣд. по (22) § 111:

$$U = \frac{k^2 m}{\rho}.$$

Дифференціальное уравненіе траекторіи (5) приметъ теперь видъ:

$$\frac{A^2}{\rho^4} \cdot \frac{d\rho^2}{d\theta^2} + \frac{A^2}{\rho^2} = \frac{2k^2}{\rho} + 2h. \tag{6}$$

Постоянныя $2h$ и A по (4) и (3), такъ выразятся черезъ начальныя условія:

$$\left.\begin{aligned} 2h &= v_0{}^2 - \frac{2k^2}{\rho_0}; \\ A &= v_0 \rho_0 \sin(\rho_0, v_0). \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Полагаемъ временно:

$$z = \frac{A}{\rho}; \tag{8}$$

тогда изъ (6) получаемъ:

$$\frac{dz^2}{d\theta^2} = 2h + \frac{2k^2}{A} z - z^2 = 2h + \frac{k^4}{A^2} - \left(z - \frac{k^2}{A}\right)^2. \tag{9}$$

Пусть

$$2h + \frac{k^4}{A^2} = \frac{k^4}{A^2} e^2. \tag{10}$$

Легко убѣдиться, что сумма эта не можетъ быть отрицательною. На самомъ дѣлѣ по (7)

$$2h + \frac{k^4}{A^2} = v_0{}^2 - \frac{2k^2}{\rho_0} + \frac{k^4}{\rho_0{}^2 v_0{}^2 \sin^2(\rho_0 v_0)} \geqq \left(v_0 - \frac{k^2}{\rho_0 v_0}\right)^2.$$

Изъ (10) вытекаетъ:

$$2h = \frac{k^4}{A^2}(e^2 - 1)$$

и слѣдовательно

если $h > 0$, то $e > 1$;

$$\text{если } h = 0, \text{ то } e = 1;$$

$$h < 0, \quad e < 1.$$

Возвращаясь къ (9), находимъ:

$$\frac{dz}{\sqrt{\frac{k^4}{A^2}e^2 - \left(z - \frac{k^2}{A}\right)^2}} = \pm d\theta.$$

Условимся такъ считать полярный уголъ, чтобы въ начальный моментъ производная $\frac{dz}{d\theta}$ была отрицательна. Тогда, сохраняя нижній знакъ, интегрируемъ:

$$arc\cos \frac{z - \frac{k^2}{A}}{\frac{k^2}{A}e} = \theta + C_5.$$

Замѣняемъ z его выраженіемъ (8) и переходимъ къ обратнымъ функціямъ:

$$\frac{A}{\rho} - \frac{k^2}{A} = \frac{k^2}{A} e \cos(\theta + C_5),$$

откуда получается искомое уравненіе траекторіи:

$$\rho = \frac{\frac{A^2}{k^2}}{1 + e\cos(\theta + C_5)}. \tag{11}$$

Это кривая второго порядка, отнесенная къ фокусу.

Постоянная e представляетъ собою эксцентриситетъ кривой, а $\frac{A^2}{k^2}$ параметръ p. Для эллипса и гиперболы:

$$\frac{A^2}{k^2} = p = a(1 - e^2) = \alpha(e^2 - 1), \tag{12}$$

гдѣ a большая полуось эллипса, а 2α длина сѣкущей оси гиперболы.

Такъ какъ для $\theta = -C_5$ радіусъ векторъ получаетъ наименьшее возможное значеніе, то $C_5 = -\theta_\pi$, гдѣ θ_π координата той точки на орбитѣ, которая лежитъ ближе всѣхъ къ центру притяженія.

Въ Астрономіи такую точку называютъ **перигеліемъ**, если дѣло идетъ о движеніи кометы или планеты вокругъ солнца, а уголъ $\psi = \theta + C_5 = \theta - \theta_\pi$, представляющій собою угловое разстояніе планеты отъ перигелія,носитъ названіе **истинной аномаліи**.

Чтобы окончить задачу, остается опредѣлить зависимость истинной аномаліи отъ времени. По (3), (11) и (12), замѣчая, что $d\psi = d\theta$, находимъ:

$$\frac{d\psi}{(1+e\cos\psi)^2} = \frac{k^4}{A^3}\,dt = \frac{k}{p^{3/2}}\,dt. \tag{13}$$

Вмѣсто ψ вводимъ новую перемѣнную η, полагая

$$\eta = tg\,\frac{\psi}{2}$$

или

$$\psi = 2\,arctg\,\eta$$

и слѣдовательно

$$d\psi = \frac{2\,d\eta}{1+\eta^2}.$$

Такъ какъ

$$\cos\psi = \frac{1-\eta^2}{1+\eta^2},$$

то послѣ сокращеній получаемъ:

$$\frac{d\psi}{(1+e\cos\psi)^2} = \frac{2(1+\eta^2)\,d\eta}{[1+e+(1-e)\,\eta^2]^2} = \frac{2}{(1+e)^2}\,\frac{(1+\eta^2)\,d\eta}{(1+\gamma\eta^2)^2}, \tag{14}$$

гдѣ

$$\gamma = \frac{1-e}{1+e}.$$

Для параболы $e=1$, слѣд. $\gamma = 0$, а потому изъ (13) и (14):

$$(1+\eta^2)\,d\eta = \frac{2k}{p^{3/2}}\,dt,$$

откуда послѣ интеграціи:

$$\frac{2k}{p^{3/2}}(t-\tau)=\eta+\frac{1}{3}\eta^3=tg\,\frac{\psi}{2}+\frac{1}{3}\,tg^3\,\frac{\psi}{2}.$$

Произвольная постоянная τ равна времени прохода точки черезъ перигелій ($\psi=0$).

Когда γ отлично отъ нуля, то замѣчаемъ, что

$$\frac{1+\eta^2}{(1+\gamma\eta^2)^2}=\frac{\frac{1}{\gamma}(1+\gamma\eta^2)+1-\frac{1}{\gamma}}{(1+\gamma\eta^2)^2}=\frac{1}{\gamma}\,\frac{1}{1+\gamma\eta^2}+\frac{\gamma-1}{\gamma}\cdot\frac{1}{(1+\gamma\eta^2)^2},$$

и слѣдовательно

$$\int\frac{(1+\eta^2)\,d\eta}{(1+\gamma\eta^2)^2}=\frac{1}{\gamma}\int\frac{d\eta}{1+\gamma\eta^2}+\frac{\gamma-1}{\gamma}\int\frac{d\eta}{(1+\gamma\eta^2)^2}. \qquad (15)$$

Послѣдній интегралъ можно свести къ интегралу, ему предшествующему. Съ этою цѣлью интегрируемъ по частямъ

$$\int\frac{d\eta}{1+\gamma\eta^2},$$

и находимъ:

$$\int\frac{d\eta}{1+\gamma\eta^2}=\frac{\eta}{1+\gamma\eta^2}+2\gamma\int\frac{\eta^2\,d\eta}{(1+\gamma\eta^2)^2}=$$

$$=\frac{\eta}{1+\gamma\eta^2}+2\int\frac{d\eta}{1+\gamma\eta^2}-2\int\frac{d\eta}{(1+\gamma\eta^2)^2}.$$

Отсюда имѣемъ:

$$\int\frac{d\eta}{(1+\gamma\eta^2)^2}=\frac{1}{2}\,\frac{\eta}{1+\gamma\eta^2}+\frac{1}{2}\int\frac{d\eta}{1+\gamma\eta^2}.$$

Теперь выраженіе (15) принимаетъ видъ:

$$\int\frac{(1+\eta^2)\,d\eta}{(1+\gamma\eta^2)^2}=\frac{\gamma-1}{2\gamma}\,\frac{\eta}{1+\gamma\eta^2}+\frac{\gamma+1}{2\gamma}\int\frac{d\eta}{1+\gamma\eta^2}.$$

Воспользовавшись этимъ равенствомъ и (14), изъ (13) получаемъ:

$$\frac{k}{p^{3/2}}(t-\tau)=\frac{1}{(1+e)^2}\left\{\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\eta}{1+\gamma\eta^2}+\frac{\gamma+1}{\gamma}\int_0^{\eta}\frac{d\eta}{1+\gamma\eta^2}\right\},$$

гдѣ произвольная постоянная τ представляетъ собою время прохожденія черезъ перигелій ($\eta=0$).

Такъ какъ

$$\frac{\gamma-1}{\gamma}=-\frac{2e}{1-e};\quad \frac{\gamma+1}{\gamma}=\frac{2}{1-e},$$

то предъидущее равенство можемъ переписать такъ:

$$\frac{k}{p^{3/2}}(t-\tau)=\frac{2}{(1+e)(1-e^2)}\left\{\int_0^{\eta}\frac{d\eta}{1+\gamma\eta^2}-e\frac{\eta}{1+\gamma\eta^2}\right\}. \qquad (16).$$

Для эллипса $e<1$, слѣд. $\gamma>0$, а потому

$$\int\frac{d\eta}{1+\gamma\eta^2}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,arctg\,(\eta\sqrt{\gamma}).$$

Вводимъ новую перемѣнную f, полагая

$$f=2\,arctg\,(\eta\sqrt{\gamma}),$$

т. е.

$$\eta\sqrt{\gamma}=tg\frac{f}{2}.$$

Тогда очевидно

$$\frac{2\eta}{1+\gamma\eta^2}=\frac{2}{\sqrt{\gamma}}\sin\frac{f}{2}\cos\frac{f}{2}=\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sin f.$$

А потому изъ (16):

$$\frac{k}{p^{3/2}}(t-\tau)=\frac{1}{(1+e)(1-e^2)\sqrt{\gamma}}(f-e\sin f).$$

Замѣняя здѣсь γ его значеніемъ и подставляя вмѣсто p выраженіе (12), послѣ сокращенія на $(1-e^2)^{3/2}$, находимъ окончательно для эллипса:

$$\frac{k}{\sqrt{a^3}}(t-\tau)=f-e\sin f.$$

Уголъ f называется въ Астрономіи *эксцентрической аномаліей*.

Для гиперболы $e>1$, слѣдов. $\gamma<0$, поэтому интегралъ въ выраженіи (16) находимъ такъ:

$$\int\frac{d\eta}{1+\gamma\eta^2}=\frac{1}{2\sqrt{-\gamma}}\log\frac{1+\eta\sqrt{-\gamma}}{1-\eta\sqrt{-\gamma}}.$$

Если теперь положить

$$\eta\sqrt{-\gamma}=tg\frac{F}{2},$$

то окажется

$$\frac{1+\eta\sqrt{-\gamma}}{1-\eta\sqrt{-\gamma}}=\frac{1+tg\frac{F}{2}}{1-tg\frac{F}{2}}=tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{F}{2}\right);$$

$$\frac{\eta}{1+\gamma\eta^2}=\frac{1}{\sqrt{-\gamma}}\frac{tg\frac{F}{2}}{1-tg^2\frac{F}{2}}=\frac{1}{2\sqrt{-\gamma}}tg\,F.$$

Подставляя въ (16) найдемъ:

$$\frac{k}{p^{3/2}}(t-\tau)=\frac{1}{(1+e)(1-e^2)\sqrt{-\gamma}}\left[\log tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{F}{2}\right)-e\,tg\,F\right].$$

Пользуемся снова (12) и замѣняемъ γ его значеніемъ; тогда послѣ сокращенія на $(e^2-1)^{3/2}$ находимъ окончательно для гиперболы:

$$\frac{k}{\sqrt{a^3}}(t-\tau)=e\,tg\,F-\log tg\left(\frac{\pi}{4}+\frac{F}{2}\right).$$

117. Формула Бине. Въ заключенiе настоящей главы покажемъ, какъ въ общемъ случаѣ, пользуясь интеграломъ площадей, получить дифференцiальное уравненiе второго порядка для центральной орбиты (формулу Бине).

Пусть величина центральной силы F. По условiю § 111 $F > 0$ для отталкиванiя и $F < 0$ для притяженiя. Интегралъ площадей въ полярныхъ координатахъ r и θ будетъ:

$$r^2\,\theta' = A. \tag{17}$$

Возьмемъ проекцiи силы F на ось μ полярныхъ координатъ (§ 39). По (4) § 93 имѣемъ:

$$F\cos(F\mu) = F = m(r'' - r\theta'^2).$$

Станемъ разсматривать r, какъ функцiю отъ θ; тогда по (17):

$$r' = \frac{dr}{d\theta}\,\theta' = \frac{A}{r^2}\frac{dr}{d\theta} = -A\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}\,.$$

Дифференцируемъ еще разъ подобнымъ же образомъ:

$$r'' = -A\,\frac{d}{dt}\,\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} = -A\,\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\,\theta' = -\,\frac{A^2}{r^2}\,\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2}\,.$$

Такимъ образомъ оказывается, что

$$\frac{1}{m}F = -\,\frac{A^2}{r^2}\,\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} - \frac{A^2}{r^3}$$

или

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\,\frac{Fr^2}{mA^2}\,. \tag{18}$$

Полученная формула Бине чаще всего служитъ для опредѣленiя закона измѣненiя силы по данному уравненiю центральной орбиты, но можетъ быть примѣнена и къ рѣшенiю обратнаго вопроса.

Примѣры: а) Точка движется подъ дѣйствіемъ центральной силы по логарифмической спирали. Найти законъ притяженія или отталкиванія, если дѣйствующій центръ въ асимптотической точкѣ кривой.

Уравненіе траекторіи:

$$r = a\,e^{\lambda\theta},$$

гдѣ a и λ нѣкоторыя постоянныя.

Вычисляемъ производную:

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{\lambda^2}{a}e^{-\lambda\theta} = \frac{\lambda^2}{r}.$$

Подставляя въ (18) находимъ:

$$F = -\frac{mA^2(\lambda^2+1)}{r^3} = -\frac{C^2}{r^3};$$

сила притягательная, обратнопропорціональная кубу разстоянія.

б) Найти орбиту для притяженія по закону Ньютона. Въ разсматриваемомъ случаѣ

$$F = -\frac{k^2 m}{r^2}.$$

Слѣд. формула (18) даетъ такое дифференціальное уравненіе орбиты:

$$\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{k^2}{A^2}.$$

Общимъ интеграломъ этого линейнаго дифференціальнаго уравненія служитъ:

$$\frac{1}{r} = C.\cos\theta + C_1.\sin\theta + \frac{k^2}{A^2},$$

гдѣ C и C_1 постоянныя произвольныя, или

$$\frac{1}{r} = \frac{k^2}{A^2} + \frac{k^2}{A^2}D\cos(\theta+E).$$

гдѣ D и E новыя постоянныя произвольныя. Отсюда искомая орбита

$$r = \frac{\frac{A^2}{k^2}}{1 + D\cos(\theta+E)},$$

коническое сѣченіе, отнесенное къ фокусу.

ГЛАВА XIV.

Дифференціальныя уравненія движенія несвободной точки.

118. Кинематическія связи удерживающія и неудерживающія. Матеріальная точка называется свободною тогда, когда она можетъ занимать произвольное положеніе въ пространствѣ. Если же заранѣе дано то геометрическое протяженіе, въ предѣлахъ котораго должна двигаться разсматриваемая точка, тогда самую точку называютъ несвободною, а условія, стѣсняющія ея свободу, кинематическими связями.

Данное геометрическое протяженіе можетъ быть объемомъ, поверхностью или линіей.

Пусть несвободная точка не можетъ покидать даннаго объема. Поверхность, ограничивающая этотъ объемъ, вообще говоря, подвижная и перемѣнной формы (деформирующаяся), поэтому въ общемъ случаѣ уравненіе ея имѣетъ видъ:

$$f(x, y, z, t) = 0, \tag{1}$$

если возьмемъ систему декартовыхъ координатъ.

Мы условимся, разъ навсегда, такъ писать предъидущее уравненіе, чтобы для возможныхъ положеній точки лѣвая часть была положительною. Тогда аналитическимъ выраженіемъ для связи, наложенной на матеріальную точку, служитъ неравенство:

$$f(x, y, z, t) \geq 0. \tag{2}$$

Связь такого рода носитъ названіе связи неудерживающей. Когда точка движется по границѣ объема, по поверхности (1), т. е. когда лѣвая часть (2) равна нулю, говорятъ, что связь находится въ состояніи напряженія или связь дѣйствуетъ. Когда точка внутри объема, т. е. когда лѣвая часть (2) больше нуля, говорятъ, что связь ослабла или не дѣйствуетъ.

Примѣръ: а) Точка можетъ двигаться лишь внутри сферы радіуса R съ центромъ въ началѣ координатъ. Такая связь выразится неравенствомъ:

$$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0.$$

Если же точка можетъ двигаться только внѣ вышеупомянутой сферы, то аналогическимъ выраженіемъ связи будетъ неравенство.

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geq 0.$$

б) Неравенство:

$$A^2t^2 - \frac{(x-\alpha t)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta t)^2}{b^2} - \frac{(z-\gamma t)^2}{c^2} \geq 0,$$

выражаетъ собою, что точка должна двигаться внутри эллипсоида, центръ котораго движется прямолинейно и равномѣрно со скоростью $\sqrt{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}$; оси этого эллипсоида возрастаютъ пропорціонально времени, слѣд. онъ увеличивается, оставаясь себѣ подобнымъ.

Когда точка должна двигаться по данной поверхности, то общимъ типомъ уравненія связи будетъ:

$$f(x, y, z, t) = 0. \tag{3}$$

Время войдетъ явно, если данная поверхность подвижная или деформирующаяся. Связь, выражаемая равенствомъ (3), называется связью удерживающею.

Примѣръ: уравненіе:

$$Ax + By + Cz + Dt^2 + Et + F = 0,$$

гдѣ $A, B, \ldots F$ нѣкоторыя постоянныя, требуетъ, чтобы точка не покидала подвижной плоскости. Плоскость эта, оставаясь параллельною своему начальному положенію, т. е. двигаясь поступательно, удаляется равномѣрно ускоренно отъ своего начальнаго положенія:

$$Ax + By + Cz + F = 0.$$

Если точка не можетъ покидать нѣкоторой кривой, то обстоятельство это выразится двумя равенствами:

$$\begin{aligned} f_1(x, y, z, t) &= 0; \\ f_2(x, y, z, t) &= 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Время не войдетъ явно, когда данная кривая неподвижна и неизмѣннаго вида. Такъ какъ разсматриваемая связь выражается двумя равенствами типа (3), то говорятъ, что въ этомъ случаѣ точка подчинена двумъ удерживающимъ связямъ.

Примѣръ: Уравненія:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0;\ z - R \sin t = 0,$$

показываютъ, что точка лежитъ на окружности. Центръ этой окружности совершаетъ простое гармоническое движеніе, а радіусъ періодически измѣняется отъ нуля до R.

Разсматривать одновременно три удерживающія связи не представляется необходимости. Пусть эти связи будутъ:

$$f_1(x, y, z, t) = 0;\ f_2(x, y, z, t) = 0;\ f_3(x, y, z, t) = 0. \tag{5}$$

Если между лѣвыми частями написанныхъ уравненій не существуетъ зависимости вида:

$$\Pi(f_1, f_2, f_3, t) = 0, \tag{6}$$

то поверхности (5) пересѣкаются въ одной или нѣсколькихъ дискретныхъ точкахъ (вещественныхъ или мнимыхъ); слѣд. положеніе движущейся точки извѣстно для каждаго момента времени, или точка не можетъ одновременно лежать на всѣхъ поверхностяхъ (5). Когда же существуетъ зависимость вида (6), то при $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$ изъ (6) вытекаетъ либо $f_3 = 0$, либо $f_3 = \varphi(t)$, отличной отъ нуля. Въ первомъ случаѣ связь f_3 была бы слѣдствіемъ связей f_1 и f_2, а во второмъ случаѣ связь f_3 противорѣчила бы первымъ двумъ.

Примѣръ: Лѣвыя части уравненій:

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0;$$

$$f_2 = x + y + z - R \cos \alpha = 0;$$

$$f_3 = (x-a)^2 + (y-a)^2 + (z-a)^2 - 3a^2 = 0;$$

удовлетворяютъ соотношенію:

$$f_3 - f_1 + 2a f_2 - R(R - 2a \cos \alpha) = 0.$$

Слѣд. при $a = \frac{1}{2} R \sec \alpha$ эти связи могутъ быть замѣнены двумя; при другомъ значеніи для a связи будутъ противорѣчивыми.

Приходится иногда разсматривать одновременно двѣ, три и болѣе неудерживающихъ связей въ томъ случаѣ, когда объемъ, предоставленный для движенія матеріальной точки, ограниченъ не одною, а нѣсколькими поверхностями.

Примѣры: а) Связи:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \cos^2 \alpha \geqq 0;\ R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geqq 0;$$

составляютъ для движенія точки объемъ между двумя концентрическими сферами радіусовъ R и $R \cos \alpha$.

б) Связи:

$$R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geqq 0;$$

$$4 R^2 - x^2 - \frac{y^2}{\cos^2\alpha} - \frac{z^2}{\sin^2\alpha} \geqq 0$$

предоставляютъ для точки объемъ, ограниченный кусками сферы и эллипсоида.

Двѣ одновременныхъ связи удерживающая и неудерживающая предоставляютъ для движенія точки нѣкоторую ограниченную часть поверхности.

Примѣры: а) При связяхъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0;$$

$$z - R \cos \alpha \geqq 0.$$

матеріальная точка можетъ двигаться по поверхности сегмента съ высотою $R(1 - \cos \alpha)$.

б) При связяхъ:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0;$$

$$R^2 \cos^2 \alpha - z^2 \geqq 0,$$

точка движется по сферическому поясу съ высотою $2 R \cos \alpha$.

Число неудерживающихъ связей и здѣсь можетъ быть болѣе одной, если граница поверхности состоитъ изъ нѣсколькихъ линій, аналитически отличныхъ одна отъ другой.

Примѣръ: Связи:

$$x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0;$$

$$x \geqq 0;\ y \geqq 0;\ z \geqq 0;$$

позволяютъ точкѣ двигаться лишь внутри равносторонняго и равноугольнаго сферическаго треугольника.

119. Условіе, налагаемое на скорость несвободной точки удерживающею связью. Пусть матеріальная точка находится на удерживающей связи (3). Лѣвую часть уравненія (3), зависящую отъ времени явно и неявно, означимъ для сокращенія черезъ $F(t)$.

Разсмотримъ два смежныхъ момента времени t и $t+\Delta t$. Такъ какъ точка въ оба эти момента должна лежать на связи, то

$$F(t)=0;\ F(t+\Delta t)=0;$$

а потому

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=0,$$

каковъ бы ни былъ промежутокъ времени Δt. Положимъ Δt безконечно малымъ; тогда приходимъ отъ предъидущаго равенства къ такому, справедливому для любого момента t:

$$\text{Пред.}\left\{\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}\right\}_{\Delta t=0}=\frac{dF}{dt}=\frac{df}{dt}=0, \tag{7}$$

гдѣ, какъ всегда, прямыми буквами означены полныя производныя по времени.

Разсуждая такимъ же образомъ относительно функціи $\frac{df}{dt}=\varphi(t)$, получаемъ:

$$\varphi(t)=0;\ \varphi(t+\Delta t)=0;$$

$$\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}=0;$$

при всякомъ t, а при Δt безконечно маломъ:

$$\text{Пред.}\left\{\frac{\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)}{\Delta t}\right\}_{\Delta t=0}=\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d^2f}{dt^2}=0. \tag{8}$$

Тѣмъ же путемъ мы могли идти и дальше, но въ этомъ нѣтъ нужды. Полученныя равенства (7) и (8) выражаютъ собою тѣ условія, которыя налагаются на скорость и ускореніе несвободной точки удерживающею связью.

Раскрывая (7), находимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial z}z'+\frac{\partial f}{\partial t}=0, \tag{9}$$

если запятою означимъ производныя по времени.

Замѣтимъ, что

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\Delta f\cos(\Delta f,x);\ \frac{\partial f}{\partial y}=\Delta f\cos(\Delta f,y);\ \frac{\partial f}{\partial z}=\Delta f\cos(\Delta f,z);\qquad(10)$$

а

$$x'=v\cos(v,x);\ y'=v\cos(v,y);\ z'=v\cos(v,z),$$

гдѣ Δf означаетъ дифференціальный параметръ перваго порядка или градіентъ функціи f (§ 111), а v — скорость движущейся точки. Тогда вмѣсто (9) можемъ написать

$$\Delta f\,.\,v\cos(v,\Delta f)+\frac{\partial f}{\partial t}=0.\qquad(11)$$

Мы видимъ, что ограниченію подлежитъ лишь составляющая скорости вдоль по градіенту; эта составляющая должна имѣть опредѣленную величину для даннаго момента времени и даннаго положенія точки:

$$v\cos(v,\Delta f)=-\frac{1}{\Delta f}\frac{\partial f}{\partial t}\qquad(12)$$

Что же касается до составляющей v въ плоскости перпендикулярной къ Δf, то она можетъ быть вполнѣ произвольною.

Когда $\frac{\partial f}{\partial t}=0$, т. е. связь явно не зависитъ отъ времени, то равенство (11) даетъ

$$v\cos(v,\Delta f)=0$$

или

$$v\perp\Delta f.\qquad(13)$$

Полученное условіе очевидно: оно требуетъ, чтобы скорость точки, движущейся по неподвижной поверхности неизмѣннаго вида, лежала въ плоскости касательной къ этой поверхности.

120. Условіе, налагаемое на ускореніе несвободной точки удерживающею связью. Обращаясь къ выраженію (8) и раскрывая его, получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x''+\frac{\partial f}{\partial y}y''+\frac{\partial f}{\partial z}z''+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}x'^2+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}z'^2+2\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}y'z'+2\frac{\partial^2 f}{\partial z\partial x}z'x'+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}x'y'+$$

$$+2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial x}x'+2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial y}y'+2\frac{\partial^2 f}{\partial t\partial z}z'+$$

$$+\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}=0. \qquad (14)$$

Здѣсь

$$x''=\frac{d^2x}{dt^2}=\dot{v}\cos(\dot{v}x),\ y''=\dot{v}\cos(\dot{v}y),\ z''=\dot{v}\cos(\dot{v}z),$$

если $\dot{v}$ ускореніе точки.

Поэтому, пользуясь (10), можемъ предъидущему равенству (14) дать видъ:

$$\Delta f\,\dot{v}\cos(\dot{v}\,\Delta f)+D_2 f=0. \qquad (15)$$

Символъ $D_2 f$ означаетъ тутъ послѣднія три строки выраженія (14).

Опять оказывается, что существованіе связи налагаетъ ограниченіе только на составляющую ускоренія точки вдоль дифференціальнаго параметра связи:

$$\dot{v}\cos(\dot{v}\,\Delta f)=-\frac{1}{\Delta f}D_2 f.$$

Составляющая же ускоренія въ плоскости, перпендикулярной къ Δf, ничѣмъ не опредѣляется.

Относительно состава $D_2 f$ замѣтимъ, что это выраженіе содержитъ въ себѣ члены трехъ родовъ: въ одни скорости входятъ во второй степени, другіе содержатъ скорости линейнымъ образомъ и наконецъ третьи свободны отъ скоростей. Когда $\frac{\partial f}{\partial t}=0$, члены послѣднихъ двухъ категорій отсутствуютъ и $D_2 f$ обращается въ квадратную однородную функцію скоростей. Замѣтимъ, что по внѣшнему виду условіе (15) не измѣнится въ разсматриваемомъ случаѣ, противоположно тому, какъ это было съ условіемъ (11) относительно скорости.

121. Условія, налагаемыя на скорость и ускореніе несвободной точки неудерживающею связью. Положимъ теперь, что свобода матеріальной точки стѣснена неудерживающею связью (2).

Когда связь эта ослаблена (§ 118):

$$f(x, y, z, t) > 0;$$

т. е. точка движется внутри объема, предоставленнаго ей, то, очевидно, она можетъ принимать произвольную скорость и произвольное ускореніе, слѣд. эти векторы никакимъ ограниченіямъ не подлежатъ.

Если же связь дѣйствуетъ въ моментъ t:

$$f(x, y, z, t) = F(t) = 0, \tag{16}$$

то въ какой либо изъ послѣдующихъ моментовъ $t + \Delta t$ $(\Delta t > 0)$ по (2):

$$F(t + \Delta t) \geqq 0.$$

Отсюда

$$\frac{F(t+\Delta t) - F(t)}{\Delta t} \geqq 0,$$

при произвольномъ, но положительномъ Δt. Принимая Δt безконечно малымъ, находимъ:

$$\frac{dF}{dt} = F'(t) = \frac{df}{dt} \geqq 0. \tag{17}$$

Слѣд. при соблюденіи (16), скорость точки по (17) должна выполнять условіе (§ 119):

$$\Delta f \,.\, v \cos(v, \Delta f) + \frac{df}{dt} \geqq 0.$$

Когда поверхность не деформируется и неподвижна, т. е. $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$:

$$v \cos(v, \Delta f) \geqq 0. \tag{18}$$

Замѣтимъ при этомъ, что дифференціальный параметръ связи направленъ в н у т р ь объема, предоставленнаго для движенія точки. Въ самомъ дѣлѣ, по § 112, направленіе Δf идетъ въ ту сторону, въ которую функція f возрастаетъ, а она возрастаетъ при перемѣщеніи внутрь объема, ибо для точекъ на поверхности функція f равна 0, а для точекъ внутри объема $f > 0$, по условію.

Если для момента t: $\frac{df}{dt} > 0$, то никакихъ заключеній о высшихъ производныхъ сдѣлать не можемъ и слѣд. ускореніе точки

остается вполнѣ произвольнымъ. Когда же $\frac{df}{dt}=0$ для момента t, то изъ равенства: $F(t)=0$; $F'(t)=0$; вытекаетъ:

$$F(t+\Delta t)=\frac{\Delta t^2}{2}F''(t+\theta\Delta t), \tag{19}$$

гдѣ θ правильная положительная дробь. Но $F(t+\Delta t)\geqq 0$, слѣд.

$$F''(t)=\frac{d^2F}{dt^2}=\frac{d^2f}{dt^2}\geqq 0; \tag{20}$$

или по предъидущему параграфу:

$$\Delta f\,\dot{v}\,cos(\dot{v}\,\Delta f)+D_2 f\geqq 0. \tag{21}$$

Не должно забывать, что написанное неравенство предполагаетъ

$$f=0;\ \frac{df}{dt}=0.$$

Въ заключеніе обратимъ вниманіе на то, что, когда $f=0$, а $\frac{df}{dt}>0$ или когда $f=0$, $\frac{df}{dt}=0$, а $\frac{d^2f}{dt^2}>0$, движущаяся точка въ одинъ изъ моментовъ, слѣдующихъ за разсматриваемымъ, должна сойти со связи, т. е. f станетъ больше нуля. Дѣйствительно, въ первомъ случаѣ функція f возрастаетъ $\left(\frac{df}{dt}>0\right)$; слѣд. изъ нуля она станетъ положительною: $f>0$; во второмъ случаѣ функція $\frac{df}{dt}$ возрастаетъ, слѣд. изъ нуля она обратится въ положительную величину, но тогда f станетъ функціею возрастающею и слѣд. изъ нуля станетъ положительною: $f>0$.

Такимъ образомъ движеніе по поверхности $f=0$, возможно и здѣсь лишь при условіяхъ:

$$f=0;\ \frac{df}{dt}=0;\ \frac{d^2f}{dt^2}=0. \tag{22}$$

122. Реакція удерживающей связи. Связи идеальныя. Множитель связи. Пусть на несвободную матеріальную точку, находящуюся на удерживающей связи:

$$f(x,y,z,t)=0, \tag{23}$$

...ствуетъ сила F, имѣющая своими составляющими по координатнымъ осямъ X, Y, Z. Если бы точка была свободною, то по ...амъ Ньютона ея уравненія движенія были бы (§ 93):

$$mx'' = X;\ my'' = Y;\ mz'' = Z. \tag{24}$$

Но по (15) ускореніе разсматриваемой точки должно удовлетворять условію:

$$\frac{d^2f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x}x'' + \frac{\partial f}{\partial y}y'' + \frac{\partial f}{\partial z}z'' + D_2 f = 0. \tag{25}$$

Слѣдовательно, если равенства (24) и (25) не противорѣчатъ другъ другу, то изъ нихъ вытекаетъ такая зависимость между ...ціями силы F:

$$\frac{1}{m}\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z}\right) + D_2 f = 0. \tag{26}$$

Но нетрудно видѣть, что тогда уравненіе (23) служитъ однимъ ... интеграловъ движенія, а потому мы имѣемъ дѣло съ ...ымъ случаемъ движенія свободной точки, а не съ движеніемъ точки по связи.

Дѣйствительно, если уравненія (24) умножимъ соотвѣтственно $\frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{1}{m}\frac{\partial f}{\partial z}$ и затѣмъ сложимъ, то, какъ слѣдствіе изъ ..., получимъ:

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'' + \frac{\partial f}{\partial y}y'' + \frac{\partial f}{\partial z}z'' = \frac{1}{m}\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

... по (26):

$$\frac{\partial f}{\partial x}x'' + \frac{\partial f}{\partial y}y'' + \frac{\partial f}{\partial z}z'' + D_2 f = \frac{d^2f}{dt^2} = 0\,;$$

..., интегрируя:

$$f(x, y, z, t) = \alpha t + \beta,$$

... α и β произвольныя постоянныя.

Такимъ образомъ равенство (23) является частнымъ интегра... движенія при $\alpha = \beta = 0$.

Если этотъ случай оставить въ сторонѣ, то соотношеніе (26) ...выполняется, а потому уравненія (24) противорѣчатъ ... (25).

Выйти изъ такого затрудненія мы можемъ, лишь принявши, что уравненія (24) несправедливы въ настоящемъ случаѣ: кромѣ силы F на разсматриваемую точку должна дѣйствовать нѣкоторая другая сила R, обязанная своимъ происхожденіемъ присутствію связи и потому называемая реакціею связи на точку. Такое принятіе не нарушитъ третьяго закона Ньютона, такъ какъ мы не иначе можемъ представить себѣ связь, какъ механизмъ, соединяющій одну массу съ другою, а тогда источникомъ реакціи на массу, представляемую движущеюся точкою, будетъ та масса, съ которою предъидущая связана кинематическимъ образомъ.

Итакъ уравненія (24) необходимо замѣнить слѣдующими:

$$mx'' = X + R_x,\ my'' = Y + R_y,\ mz'' = Z + R_z, \tag{27}$$

гдѣ для сокращенія положено:

$$R_x = R\cos(R, x);\ R_y = R\cos(R, y);\ R_z = R\cos(R, z). \tag{28}$$

Посмотримъ, насколько опредѣляется сила R по уравненію (23). Такъ какъ теперь условіе (25) должно быть выполнено, то по (27):

$$\frac{1}{m}\left(R_x\frac{\partial f}{\partial x} + R_y\frac{\partial f}{\partial y} + R_z\frac{\partial f}{\partial z}\right) + \frac{1}{m}\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z}\right) + D_2 f = 0$$

или по (28) и (10):

$$R\cos(R, \Delta f) = -\frac{1}{\Delta f}\left\{X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + mD_2 f\right\}. \tag{29}$$

Оказывается, что, если намъ дано лишь уравненіе (23) и неизвѣстно, какъ на дѣлѣ осуществлена связь, то опредѣленною функціею отъ t, x, y, z, x', y', z' является одна лишь составляющая реакціи по дифференціальному параметру связи: что же касается до составляющей реакціи въ плоскости, перпендикулярной къ параметру, то для нахожденія ея уравненіе (23) намъ ничего не даетъ.

Поэтому мы ограничимся въ дальнѣйшемъ разсмотрѣніемъ только такихъ связей, которыя вполнѣ опредѣляются своею аналитическою формою, т. е. уравненіемъ (23), и слѣд. не даютъ реакціи въ плоскости, перпендикулярной къ Δf. Такія связи обыкновенно называютъ идеальными; реакція идеальной связи на точку направлена всегда по соотвѣтственному градіенту связи.

Изъ вышесказаннаго не слѣдуетъ, что мы исключаемъ вовсе изъ своего разсмотрѣнія связи съ реакціями не по дифференціальнымъ параметрамъ; только, если желательно изучить движеніе точки по связи такого рода, то, кромѣ уравненія связи, намъ долженъ

быть извѣстенъ законъ, которымъ опредѣляется составляющая реакціи въ плоскости, перпендикулярной къ Δf. Законъ этотъ обыкновенно выводится изъ наблюденій и опытовъ надъ физически осуществленными связями; примѣръ тому увидимъ, когда будемъ говорить о движеніи точки по шероховатой поверхности, т. е. съ треніемъ.

На основаніи сказаннаго для идеальной связи принимаемъ, что R направлена по Δf, и слѣд. по (10):

$$R_x = \frac{R}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x};\ R_y = \frac{R}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial y};\ R_z = \frac{R}{\Delta f}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Обыкновенно отношеніе $\frac{R}{\Delta f}$ означаютъ одною буквою λ, называемою м н о ж и т е л е м ъ с в я з и, т. е.

$$\lambda = \frac{R}{\Delta f} = \frac{R}{+\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}}. \qquad (30)$$

123. Дифференціальныя уравненія движенія точки, находящейся на идеальной удерживающей связи. На основаніи вышесказаннаго уравненіямъ движенія несвободной точки (27) даемъ видъ:

$$mx'' = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x};\ my'' = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y};\ mz'' = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \qquad (31)$$

Написанныя уравненія содержатъ ч е т ы р е неизвѣстныя функціи времени: x, y, z, λ; для нахожденія этихъ функцій мы имѣемъ и ч е т ы р е уравненія, а именно (31) и (23).

Интегрированіе ведется по слѣдующему плану. Прежде всего изъ (31) исключаемъ неизвѣстную функцію λ при помощи уравненія (25), служащаго слѣдствіемъ (23). Подставляя въ (25) значенія вторыхъ производныхъ x'', y'', z'' изъ (31), опредѣляемъ отсюда λ, какъ функцію отъ t, x, y, z, x', y', z':

$$\lambda = -\frac{1}{(\Delta f)^2}\left(X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y} + Z\frac{\partial f}{\partial z} + m\,D_2 f\right). \qquad (32)$$

Когда эту величину λ вставимъ въ правыя части уравненія (31), то получимъ три совокупныхъ уравненія второго порядка относительно трехъ неизвѣстныхъ функцій времени x, y, z. Интегрированіе этихъ уравненій приведетъ насъ къ выраженіямъ для x, y, z, содержащимъ ш е с т ь произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2, \ldots C_6$;

но, какъ нетрудно видѣть, въ разсматриваемомъ случаѣ независимыхъ постоянныхъ останется только четыре.

На самомъ дѣлѣ, когда дадимъ λ ея значеніе (32), то, если умножить уравненія (31) соотвѣтственно на $\frac{1}{m}\frac{\partial f}{dx}$, $\frac{1}{m}\frac{\partial f}{dy}$, $\frac{1}{m}\frac{\partial f}{dz}$ и сложить, найдемъ такое равенство, какъ слѣдствіе (32):

$$\frac{\partial f}{dx}x'' + \frac{\partial f}{dy}y'' + \frac{\partial f}{dz}z'' = -D_2 f$$

или

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = 0,$$

откуда

$$f(x, y, z, t) = \alpha t + \beta,$$

гдѣ α и β произвольныя постоянныя. Если въ лѣвую часть полученнаго равенства вставимъ значенія для x, y, z, то α и β должны оказаться функціями отъ $C_1, C_2, \ldots C_6$:

$$\alpha = \varphi(C_1, C_2, \ldots C_6);\ \beta = \psi(C_1, C_2, \ldots C_6).$$

А потому для полученія уравненія (23) мы должны положить

$$\varphi = 0;\ \psi = 0;$$

такъ что независимыхъ между $C_1, \ldots C_6$ останутся только четыре.

Причина изложеннаго лежитъ, конечно, въ томъ, что для исключенія λ мы воспользовались не самимъ уравненіемъ (23); а второю производною отъ лѣвой части его, т. е. (25).

Примѣръ: Точка массы $= 1$ лежитъ на связи:

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{33}$$

гдѣ a, b, c, d постоянныя, и находится подъ дѣйствіемъ постоянной силы g, параллельной оси z.

Уравненія движенія:

$$x'' = \lambda a;\ y'' = \lambda b;\ z'' = g + \lambda c.$$

Опредѣляемъ λ при помощи равенства:

$$ax'' + by'' + cz'' = 0;$$

находимъ:

$$\lambda = -\frac{gc}{a^2 + b^2 + c^2} = const. = \lambda_0.$$

Уравненія безъ λ:

$$x'' = \lambda_0 a;\ y'' = \lambda_0 b;\ z'' = g + \lambda_0 c,$$

имѣютъ своими интегралами:

$$x = \frac{\lambda_0 a}{2} t^2 + C_1 t + C_2;$$

$$y = \frac{\lambda_0 b}{2} t^2 + C_3 t + C_4;$$

$$z = \frac{g + \lambda_0 c}{2} t^2 + C_5 t + C_6;$$

гдѣ $C_1, \ldots C_6$ постоянныя произвольныя.

Чтобы удовлетворить (33), между этими постоянными должно установить слѣдующія двѣ зависимости:

$$aC_1 + bC_3 + cC_5 = 0;\ aC_2 + bC_4 + cC_6 + d = 0.$$

124. Реакція неудерживающей связи. Дифференціальныя уравненія движенія точки, подчиненной неудерживающей связи. Положимъ, что свобода точки массы m стѣснена неудерживающею связью:

$$f(x, y, z, t) \geqq 0. \tag{34}$$

Пусть въ точкѣ приложена сила $F(X, Y, Z)$. Если $f > 0$, т. е. точка находится внутри объема, ограниченнаго поверхностью $f = 0$, то (§ 121) ускореніе ея никакому условію не подчинено, и ея уравненія движенія будутъ такими же, какъ и для точки свободной:

$$mx'' = X;\ my'' = Y;\ mz'' = Z. \tag{35}$$

Ускореніе точки не можетъ быть произвольнымъ только тогда, когда она движется по самой границѣ объема ($f = 0$) и при томъ, когда $\frac{df}{dt} = 0$ (§ 121); въ такомъ случаѣ ускореніе должно удовлетворять неравенству (20) или (21):

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial x} x'' + \frac{\partial f}{\partial y} y'' + \frac{\partial f}{\partial z} z'' + D_2 f \geqq 0. \tag{36}$$

Написанное соотношеніе не будетъ противорѣчить уравненіямъ (35), если сила F такова, что

$$\frac{1}{m}\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}\right)+D_2 f\geq 0. \tag{37}$$

Тогда точка все время движется, какъ свободная.

Но если

$$\frac{1}{m}\left(X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}\right)+D_2 f<0, \tag{38}$$

то, подобно предъидущему, мы принимаемъ, что къ правымъ частямъ уравненій (35) присоединяются проекціи реакціи связи R—R_x, R_y. R_z,—на координатныя оси, причемъ предполагается, что ускореніе, получаемое точкою отъ совокупнаго дѣйствія силъ F и R не сводитъ её со связи, т. е. по (22) удовлетворяетъ равенству:

$$\frac{d^2f}{dt^2}=0. \tag{39}$$

Полагая связь идеальною, мы для проекцій реакціи беремъ выраженія:

$$R_x=\lambda\frac{\partial f}{\partial x};\ R_y=\lambda\frac{\partial f}{\partial y};\ R_z=\lambda\frac{\partial f}{\partial z}.$$

Множитель λ найдемъ изъ (39) по (32):

$$\lambda=-\frac{1}{(\Delta f)^2}\left\{X\frac{\partial f}{\partial x}+Y\frac{\partial f}{\partial y}+Z\frac{\partial f}{\partial z}+m\,D_2 f\right\}. \tag{40}$$

Изъ сказаннаго выводимъ, что уравненія движенія точки, подчиненной неудерживающей связи, приходится брать либо въ видѣ (35), либо такія:

$$mx''=X+\lambda\frac{\partial f}{\partial x};\ my''=Y+\lambda\frac{\partial f}{\partial y};\ mz''=Z+\lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{41}$$

Легко опредѣлить критеріумъ, указывающій, когда надо брать уравненія одного типа, когда—другого. Изъ сравненія (40) съ (38) видимъ, что для неудерживающей связи всегда

$$\lambda>0. \tag{42}$$

Слѣд. уравненія типа (41) годятся лишь тогда, пока множитель λ сохраняетъ положительное значеніе; когда же λ обращается въ нуль (для этого случая оба типа уравненій совпадаютъ) и затѣмъ становится отрицательнымъ, надо брать уравненія типа (35).

Такимъ образомъ планъ рѣшенія вопроса о движеніи точки, подчиненной неудерживающей связи, слѣдующій. Прежде всего по начальнымъ даннымъ: $x_0, y_0, z_0, x_0', y_0' z_0'$, смотримъ, соблюдены ли для начальнаго момента $t = t_0$ условія

$$f = 0; \ \frac{df}{dt} = 0; \ \lambda \geqq 0. \qquad (43)$$

Если хотя одно изъ нихъ невыполнено, беремъ уравненія типа (35). Когда всѣ условія (43) удовлетворены, обращаемся къ уравненіямъ (41). Интегрируя ихъ (§ 123), находимъ x, y, z, λ, какъ функціи времени:

$$x = \varphi(t); \ y = \psi(t); \ z = \theta(t); \ \lambda = \gamma(t).$$

Изслѣдуемъ, не можетъ ли функція $\gamma(t)$ обратиться въ нуль и затѣмъ стать отрицательною. Если $\gamma(t)$ всегда положительна или нуль, задача кончена; если же $\gamma(t)$ обращается въ нуль для момента $t = t_1$, а затѣмъ становится < 0, то уравненія (41) годятся лишь для промежутка времени отъ t_0 до t_1. Съ момента t_1 надо уже брать уравненія (35) и интегрировать эти уравненія при начальныхъ условіяхъ: $t = t_1$, $x = \varphi(t_1)$, $y = \psi(t_1)$; $z = \theta(t_1)$; $x' = \varphi'(t_1)$; $y' = \psi'(t_1)$; $z' = \theta'(t_1)$.

Можетъ случиться, что точка, движущаяся какъ свободная, т. е. по уравненіямъ (35), снова попадетъ на связь—координаты ея обратятъ f въ нуль. Тогда произойдетъ явленіе, называемое ударомъ—скорости точки измѣнятся мгновенно. Какъ опредѣлить эти измѣненія, увидимъ впослѣдствіи. Во всякомъ случаѣ къ новымъ скоростямъ послѣ удара мы должны отнестись, какъ къ даннымъ начальнымъ, и такъ продолжать наше изслѣдованіе и переходъ отъ уравненій одного типа къ уравненіямъ другого, пока не исчерпаемъ, если сможемъ, всѣ моменты, для которыхъ или λ обращается въ нуль, или происходитъ ударъ.

Изъ (41) по (42) вытекаетъ, что неудерживающая связь можетъ оказывать реакцію лишь по положительному направленію нормали или дифференціальнаго параметра перваго порядка (§ 112).

125. Дифференціальныя уравненія движенія точки, подчиненной двумъ связямъ. Положимъ, что разсматриваемая точка подчинена двумъ связямъ:

$$f_1(x, y, z, t) = 0; \ f_2(x, y, z, t) = 0. \qquad (44)$$

Принимая, что обѣ связи идеальныя, по § 123 получаемъ слѣдующія уравненія движенія для взятой точки:

$$mx'' = X + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial x};$$

$$my'' = Y + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial y}; \tag{45}$$

$$mz'' = Z + \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial f_2}{\partial z}.$$

Написанныя уравненія содержатъ пять неизвѣстныхъ функцій времени: $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$; для нахожденія этихъ функцій мы имѣемъ и пять уравненій (44) и (45).

Интегрированіе ведется тѣмъ же путемъ, какъ и для одной связи. Прежде всего изъ (45) исключаемъ неизвѣстныя функціи λ_1 и λ_2 съ помощью уравненій:

$$\frac{d^2 f_1}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 f_2}{dt^2} = 0, \tag{46}$$

служащихъ слѣдствіемъ уравненій (44). Въ раскрытомъ видѣ равенства (46) представятся такъ:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} x'' + \frac{\partial f_1}{\partial y} y'' + \frac{\partial f_1}{\partial z} z'' + D_2 f_1 = 0;$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} x'' + \frac{\partial f_2}{\partial y} y'' + \frac{\partial f_2}{\partial z} z'' + D_2 f_2 = 0.$$

Подставляя сюда значенія вторыхъ производныхъ x'', y'', z'', изъ (45), находимъ для опредѣленія λ_1 и λ_2 уравненія:

$$A_{11}\lambda_1 + A_{12}\lambda_2 + Q_1 + mD_2 f_1 = 0;$$

$$A_{21}\lambda_1 + A_{22}\lambda_2 + Q_2 + mD_2 f_2 = 0; \tag{47}$$

гдѣ

$$A_{ij} = A_{ji} = \frac{\partial f_i}{\partial x}\frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y}\frac{\partial f_j}{\partial y} + \frac{\partial f_i}{\partial z}\frac{\partial f_j}{\partial z};$$

$$Q_i = X\frac{\partial f_i}{\partial x} + Y\frac{\partial f_i}{\partial y} + Z\frac{\partial f_i}{\partial z}; \quad \left.\begin{matrix} i \\ j \end{matrix}\right\} = 1,\ 2. \tag{48}$$

Опредѣлитель Δ уравненій (47) можетъ быть представленъ въ видѣ суммы трехъ квадратовъ; дѣйствительно по (48):

$$\Delta = A_{11} A_{22} - A_{12}{}^2 = \left\{\frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial(y\ z)}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial(z\ x)}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial(x\ y)}\right\}^2, \quad (49)$$

если условимся въ обозначеніи

$$\frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial(ab)} = \frac{\partial\varphi}{\partial a}\frac{\partial\psi}{\partial b} - \frac{\partial\psi}{\partial a}\frac{\partial\varphi}{\partial b}.$$

Изъ (49) заключаемъ, что Δ можетъ равняться нулю лишь въ томъ случаѣ, когда каждый изъ опредѣлителей второго порядка (49) обращается въ нуль. Но тогда между функціями f_1 и f_2 должно существовать соотношеніе:

$$\Pi(f_1, f_2, t) = 0,$$

и слѣд. или 1) при $f_1 = 0$ и $f_2 = 0$, или 2) при $f_1 = 0$ функція $f_2 = \varphi(t)$, функціи времени, отличной отъ нуля. Въ первомъ случаѣ одна изъ связей служитъ слѣдствіемъ другой, а во второмъ случаѣ связи противорѣчатъ другъ другу.

Если исключимъ изъ нашего разсмотрѣнія эти случаи, то Δ будетъ отлично отъ нуля, и слѣд. мы всегда сможемъ изъ (47) опредѣлить λ_1 и λ_2 какъ функціи отъ аргументовъ x, y, z, x', y', z', t. Подставляя найденныя выраженія въ правыя части уравненій (45), получимъ три совокупныхъ уравненія второго порядка относительно неизвѣстныхъ функцій x, y, z. Интегрированіе этихъ уравненій приведетъ насъ къ выраженіямъ для x, y, z, содержащимъ шесть произвольныхъ постоянныхъ $C_1, C_2 \ldots C_6$. Нетрудно видѣть, что независимыми между ними будутъ только двѣ.

Умножая каждое изъ уравненій (45) соотвѣтственно на $\frac{\partial f_1}{\partial x}$, $\frac{\partial f_1}{\partial y}$, $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ и складывая, мы по (47) получимъ изъ уравненій (45) при найденныхъ значеніяхъ для λ_1 и λ_2 какъ слѣдствіе первое изъ уравненій (46). Тѣмъ же путемъ выведемъ изъ уравненій (45) и второе уравненіе (46). Такимъ образомъ въ числѣ интеграловъ разсматриваемой системы будутъ слѣдующіе два:

$$f_1(x, y, z, t) = \alpha_1 t + \beta_1;\ f_2(x, y, z, t) = \alpha_2 t + \beta_2. \quad (50)$$

Постоянныя α_1, β_1, α_2, β_2 должны оказаться нѣкоторыми функціями отъ C_1, $C_2 \ldots C_6$. Но для полученія изъ (50) данныхъ связей (44) мы должны положить

$$\alpha_1 = 0;\ \beta_1 = 0;\ \alpha_2 = 0;\ \beta_2 = 0;$$

что и даетъ четыре зависимости между C_1, $C_2 \ldots C_6$, такъ что произвольныхъ останется только двѣ.

Когда одна изъ связей или обѣ неудерживающія, ходъ рѣшенія тотъ же, что и въ § 124.

ГЛАВА XV.

Движенiе точки по поверхности.

126. Дифференцiальныя уравненiя движенiя точки по поверхности. Уравненiя движенiя матерiальной точки по поверхности

$$f(x, y, z, t) = 0, \qquad (1)$$

въ общемъ видѣ уже нами найдены (§ 123):

$$mx'' = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x};$$

$$my'' = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y}; \qquad (2)$$

$$mz'' = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Уравненiя эти замѣняютъ собою геометрическое равенство:

$$(m\dot{v}) = (F) + (N),$$

гдѣ $\dot{v}$ ускоренiе точки, F равнодѣйствующая приложенныхъ къ ней силъ, N реакцiя поверхности, направленная по нормали n къ поверхности (§ 122).

Посмотримъ теперь, какъ можно видоизмѣнить и упростить уравненiя (2) въ томъ случаѣ, когда поверхность неизмѣнна и неподвижна, т. е. когда въ уравненiе (1) время явно не входитъ:

$$f(x, y, z) = 0. \qquad (3)$$

Очень удобно бываетъ выбрать такую систему координатъ, чтобы поверхность (3) была одною изъ координатныхъ, а координатныя линіи, ей соотвѣтствующія, были къ этой поверхности ортогональны. Пусть мы взяли такую систему координатъ q_1, q_2, q_3, и поверхность (3) представляется въ этой системѣ уравненіемъ

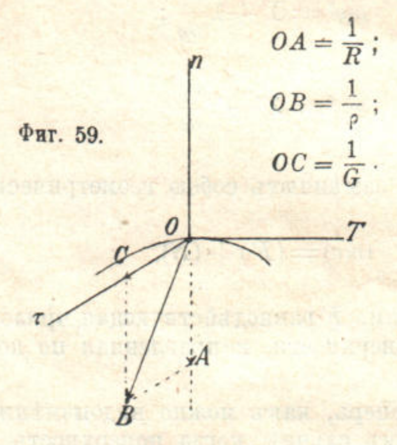
$$q_3 - a_3 = 0, \tag{4}$$

гдѣ a_3 нѣкоторая постоянная.

Реакція поверхности (§ 122) будетъ направлена по координатной оси 3 (§ 43) и слѣд. не дастъ проекцій на оси 1 и 2. Поэтому уравненія движенія точки будуть (см. (12) § 52 и (2) § 93):

$$\begin{aligned} \frac{m}{A_1}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial q_1'} - \frac{\partial h}{\partial q_1}\right) &= Q_1, \\ \frac{m}{A_2}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial q_2'} - \frac{\partial h}{\partial q_2}\right) &= Q_2, \\ \frac{m}{A_3}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial h}{\partial q_3'} - \frac{\partial h}{\partial q_3}\right) &= Q_3 + N, \end{aligned} \tag{5}$$

гдѣ A_1, A_2, A_3 коеффиціенты выраженія h (см. (18) § 43), Q_1, Q_2, Q_3 проекціи F на соотвѣтственныя координатныя оси, а N реакція поверхности.



$$OA = \frac{1}{R}; \quad OB = \frac{1}{\rho}; \quad OC = \frac{1}{G}.$$

Фиг. 59.

Мы видимъ, что первыя два уравненія (5) вовсе не содержатъ реакціи, а потому, если намъ интересно лишь движеніе точки, то мы можемъ ограничиться этими двумя уравненіями и вовсе не

принимать во вниманіе уравненія третьяго. Первыя два уравненія (5) содержать только двѣ неизвѣстныя функціи времени q_1 и q_2, такъ какъ q_3 по (4) равно постоянному a_3. Интегралы этихъ уравненій будутъ содержать четыре произвольныхъ постоянныхъ, какъ это и слѣдуетъ (§ 123). Третье уравненіе понадобится намъ въ томъ случаѣ, когда мы пожелаемъ найти величину реакціи N.

Можно также отнести уравненія движенія точки къ слѣдующимъ подвижнымъ осямъ, имѣющимъ начало въ движущейся точкѣ: примемъ за Ox касательную OT (Фиг. 59) къ траекторіи, за Oz положительную нормаль On къ поверхности, а за Oy направленіе $O\tau$, перпендикулярное къ OT и On. Очевидно, это направленіе будетъ лежать въ касательной плоскости къ поверхности.

Пользуясь равенствомъ (3) и припоминая проекціи ускоренія на касательную и на радіусъ кривизны ρ траекторіи (§ 51), находимъ:

$$m\frac{dv}{dt}=F\cos(F,T);$$

$$m\frac{v^2}{\rho}\cos(\rho,n)=F\cos(F,n)+N; \tag{6}$$

$$m\frac{v^2}{\rho}\cos(\rho,\tau)=\pm\frac{mv^2}{\rho}\sin(\rho,n)=F\cos(F,\tau).$$

Полученныя уравненія пишутъ обыкновенно въ нѣсколько иной формѣ.

Съ этою цѣлью припомнимъ выраженія (38) § 32 для кривизны:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=\frac{1}{\rho}\cos(\rho x);\quad \frac{d^2y}{ds^2}=\frac{1}{\rho}\cos(\rho y);\quad \frac{d^2z}{ds^2}=\frac{1}{\rho}\cos(\rho z). \tag{7}$$

Мы ихъ получили, разсматривая кривизну какъ векторъ, служащій геометрической производною по дугѣ s кривой отъ нѣкотораго перемѣннаго вектора. Векторъ-кривизна имѣетъ величину равную $\frac{1}{\rho}$; а направленіе его совпадаетъ съ направленіемъ радіуса кривизны, идущимъ къ центру кривизны. Разложимъ векторъ-кривизну OB на два составляющихъ вектора (Фиг. 59), одинъ OA по нормали, а другой OC по направленію $O\tau$. Тогда

$$\begin{aligned} OA&=OB\cos(OB,n)=\frac{1}{\rho}\cos(\rho,n);\\ OC&=OB\cos(OB,\tau)=\pm OB\sin(OB,n)=\pm\frac{1}{\rho}\sin(\rho,n). \end{aligned} \tag{8}$$

Но по (7):

$$\frac{1}{\rho}\cos(\rho, n) = \frac{1}{\Delta f}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d^2y}{ds^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d^2z}{ds^2}\cdot\frac{\partial f}{\partial z}\right). \qquad (9)$$

Дифференцируя дважды по s равенство (3), мы получимъ подобно (14) § 120:

$$\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial z} + D_2'f = 0,$$

гдѣ

$$D_2'f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\left(\frac{dz}{ds}\right)^2 +$$

$$+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z}\cdot\frac{dy}{ds}\cdot\frac{dz}{ds} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial z\, \partial x}\cdot\frac{dz}{ds}\cdot\frac{dx}{ds} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dx}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}.$$

Изъ предъидущихъ равенствъ видимъ, что

$$\frac{1}{\Delta f}\left(\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial z}\right) = fonct\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$$

т. е. по (9) отношеніе

$$\frac{\cos(\rho, n)}{\rho}$$

зависитъ лишь отъ положенія точки на поверхности и направленія касательной.

Отсюда заключаемъ,

1) что для всѣхъ кривыхъ на поверхности, имѣющихъ въ данной точкѣ общую касательную и общую плоскость кривизны, радіусъ кривизны одинъ и тотъ же;

2) что для всѣхъ кривыхъ на поверхности, имѣющихъ въ данной точкѣ общую касательную, выраженіе

$$\frac{\cos(\rho, n)}{\rho} = const.$$

Если замѣтимъ, что для нормальнаго плоскаго сѣченія поверхности черезъ разсматриваемую касательную уголъ (ρ, n) равняется нулю или π, то видимъ, что

$$\frac{\cos(\rho, n)}{\rho} = \frac{1}{R},$$

гдѣ R радіусъ кривизны нормальнаго сѣченія (теорема Менье). R принимается величиною положительною или отрицательною въ зависимости отъ знака $\cos(\rho, n)$

Что же касается до OC, проекціи вектора-кривизны на касательную плоскость, то для величины его имѣемъ слѣдующее выраженіе по (9):

$$\overline{OC}^2 = \frac{\sin^2(\rho, n)}{\rho^2} = \frac{1}{\rho^2} - \frac{\cos^2(\rho, n)}{\rho^2} =$$

$$= \frac{1}{(\Delta f)^2}\left\{\left[\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{d^2y}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{d^2z}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial z}\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{1}{(\Delta f)^2}\left\{\left(\frac{d^2y}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{d^2z}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{d^2x}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d^2y}{ds^2}\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2\right\}. \qquad (10)$$

Разсматриваемый векторъ обращается въ нуль, если данная кривая удовлетворяетъ соотношеніямъ:

$$\frac{d^2x}{ds^2} : \frac{d^2y}{ds^2} : \frac{d^2z}{ds^2} = \frac{\partial f}{\partial x} : \frac{\partial f}{\partial y} : \frac{\partial f}{\partial z}$$

или

$$\cos(\rho, x) : \cos(\rho, y) : \cos(\rho, z) = \cos(n, x) : \cos(n, y) : \cos(n, z).$$

Такая кривая, у которой плоскость кривизны всегда нормальна къ поверхности, носитъ названіе **геодезической линіи**; по этому-то и проекцію OC вектора-кривизны на касательную плоскость называютъ **геодезическою кривизною** данной кривой и обыкновенно обозначаютъ такъ: $\frac{1}{G}$.

Пользуясь сдѣланными замѣчаніями, мы можемъ переписать уравненія (6) слѣдующимъ образомъ:

$$m\frac{dv}{dt}=F\cos(F,\,T);$$

$$m\frac{v^2}{R}=F\cos(F,\,n)+N; \qquad (11)$$

$$\pm m\frac{v^2}{G}=F\cos(F,\,\tau).$$

127. Интегралъ площадей. Законъ моментовъ количества движенія (§ 103) для точки, движущейся по поверхности (1), выражается такъ:

$$\frac{d}{dt}m(yz'-zy')=Zy-Yz+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial z}y-\frac{\partial f}{\partial y}z\right);$$

$$\frac{d}{dt}m(zx'-xz')=Xz-Zx+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}z-\frac{\partial f}{\partial z}x\right); \qquad (12)$$

$$\frac{d}{dt}m(xy'-yx')=Yx-Xy+\lambda\left(\frac{\partial f}{\partial y}x-\frac{\partial f}{\partial x}y\right).$$

Члены съ множителемъ λ представляютъ собою моменты реакціи около соотвѣтственныхъ осей координатъ. Для того, чтобы этотъ моментъ вокругъ какой либо оси, напр. Oz, обратился въ нуль, необходимо соблюденіе условія:

$$\frac{\partial f}{\partial y}x-\frac{\partial f}{\partial x}y=0. \qquad (13)$$

Соотвѣтствующая этому уравненію съ частными производными система совокупныхъ уравненій:

$$\frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x},$$

имѣемъ очевидный интегралъ: $x^2+y^2=const$. Слѣд. f представляется произвольною функціею отъ x^2+y^2 и, конечно, z, такъ какъ въ (13) не входитъ производная по этой перемѣнной. Другими словами, данная поверхность должна быть поверхностью вращенія вокругъ оси z-овъ. Справедливость полученнаго вывода

ясна и геометрически: нормаль къ поверхности вращенія всегда лежитъ въ одной плоскости съ осью.

Такимъ образомъ для движенія точки по поверхности вращенія мы можемъ получить интегралъ площадей (§ 105), если равнодѣйствующая сила F не даетъ момента около оси поверхности.

128. Интегралъ живой силы. Законъ живой силы (§ 109) въ примѣненіи къ точкѣ, движущейся по поверхности, даетъ по (2):

$$d\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y' + \frac{\partial f}{\partial z}z'\right)dt;$$

или, на основаніи (9) § 119,

$$d\frac{mv^2}{2} = X\,dx + Y\,dy + Z\,dz - \lambda\frac{\partial f}{\partial t}dt\cdot \tag{14}$$

Послѣдній членъ въ правой части представляетъ собою элементарную работу реакціи. Эта работа обращается въ нуль, когда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{15}$$

т. е. связь неизмѣнна и неподвижна.

Если, кромѣ того, элементарная работа равнодѣйствующей представляется полнымъ дифференціаломъ,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = dU, \tag{16}$$

то изъ (14) мы получаемъ интегралъ живой силы (§ 110) въ видѣ

$$\frac{mv^2}{2} = U + h, \tag{17}$$

гдѣ h произвольная постоянная.

Замѣтимъ, что по (15) въ силу уравненія (3) одна изъ координатъ служитъ функціею остальныхъ двухъ, напр. $z = fonct\,(x, y)$. Пусть производныя

$$\frac{\partial z}{\partial x} = p;\ \frac{\partial z}{\partial y} = q;$$

тогда

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = (X + pZ)\,dx + (Y + qZ)\,dy.$$

Здѣсь независимыхъ перемѣнныхъ только двѣ, поэтому для полученія полнаго дифференціала, т. е. выраженія (16), теперь необходимы не три условія (17) § 110, какъ для свободной точки, а только одно:

$$\frac{\partial}{\partial y}(X+pZ)=\frac{\partial}{\partial x}(Y+qZ). \tag{18}$$

Замѣтимъ, между прочимъ, что, если мы нашли интегралъ площадей и интегралъ живой силы, то мы опредѣлили всѣ независимые другъ отъ друга первые интегралы движенія для разсматриваемой точки, такъ какъ число этихъ независимыхъ интеграловъ равно двумъ (§§ 123 или 126).

129. Коническій маятникъ. Разсмотримъ движеніе тяжелой точки по неподвижной сферѣ. Выберемъ начало координатъ въ центрѣ сферы, а Oz направимъ вертикально книзу. Тогда уравненіе связи (удерживающей) будетъ:

$$R^2-x^2-y^2-z^2=0, \tag{19}$$

если R радіусъ сферы. Ускореніе тяжести означимъ черезъ g, тогда уравненія движенія по (2) представятся такъ:

$$\begin{aligned} mx'' &= -2\lambda x; \\ my'' &= -2\lambda y; \\ mz'' &= mg-2\lambda z. \end{aligned} \tag{20}$$

Дифференцируя дважды (19), получимъ:

$$xx''+yy''+zz''+x'^2+y'^2+z'^2=0.$$

Подставляя сюда изъ (20), опредѣляемъ λ:

$$2(x^2+y^2+z^2)\lambda=m(gz+x'^2+y'^2+z'^2);$$

или, полагая $x'^2+y'^2+z'^2=v^2$ и пользуясь (19):

$$\lambda=\frac{m(v^2+gz)}{2R^2}. \tag{21}$$

Чтобы получить отсюда реакцію сферы N, надо по (30) § 122 умножить λ на дифференціальный параметръ перваго порядка отъ лѣвой части уравненія связи (19); тогда имѣемъ

$$N = \lambda \Delta f = 2\lambda R = \frac{m(v^2 + gz)}{R}. \tag{22}$$

Сферу можно разсматривать какъ поверхность вращенія около любого изъ діаметровъ, а сила тяжести не даетъ момента около вертикали; поэтому для взятаго движенія мы можемъ по § 127 написать интегралъ площадей:

$$m(xy' - yx') = mA, \tag{23}$$

гдѣ A произвольная постоянная.

Кромѣ того въ настоящемъ случаѣ имѣемъ и интегралъ живой силы, такъ какъ сфера неподвижна, а сила тяжести, какъ постоянная, имѣетъ потенціалъ; сокращая на массу, интегралу живой силы дадимъ видъ:

$$v^2 = 2gz + 2h. \tag{24}$$

Введемъ цилиндрическія координаты z, r, θ (§ 39). Тогда уравненіе (19) перепишется такъ:

$$R^2 - r^2 - z^2 = 0, \tag{25}$$

а интегралы (23) и (24) примутъ видъ

$$r^2\theta' = A;$$

$$z'^2 + r'^2 + r^2\theta'^2 = 2gz + 2h.$$

Если вставимъ сюда вмѣсто r его значеніе изъ (25) и замѣтимъ, что

$$r' = -\frac{zz'}{\sqrt{R^2 - z^2}},$$

то найдемъ:

$$(R^2 - z^2)\theta' = A;$$

$$\frac{R^2}{R^2 - z^2} z'^2 + (R^2 - z^2)\theta'^2 = 2gz + 2h. \tag{26}$$

Исключая изъ (26) θ' съ помощью интеграла площадей, получимъ для z дифференціальное уравненіе:

$$z'^2 = \frac{2g}{R^2}\left\{\left(z+\frac{h}{g}\right)(R^2-z^2)-\frac{A^2}{2g}\right\} = Q(z). \tag{27}$$

Въ многочленѣ $Q(z)$ станемъ давать аргументу z значенія: $-\infty, -R, z_0, +R$; подъ z_0 мы разумѣемъ данное начальное значеніе координаты z, при чемъ, конечно, по (25)

$$-R < z_0 < +R.$$

Нетрудно видѣть, что

$$Q(-\infty) > 0;\ Q(-R) = -\frac{A^2}{R^2} < 0;\ Q(z_0) = z_0'^2 > 0;$$

$$Q(+R) = -\frac{A^2}{R^2} < 0.$$

Отсюда заключаемъ, что многочленъ $Q(z)$ имѣетъ всѣ корни вещественные; одинъ изъ корней, ζ, всегда отрицателенъ и численно больше R; другой, α, заключается между $-R$ и z_0, третій, β, между z_0 и $+R$, т. е.

$$\zeta < -R < \alpha < z_0 < \beta < +R.$$

Теперь вмѣсто (27) можемъ написать:

$$z'^2 = \frac{2g}{R^2}(z-\zeta)(\beta-z)(z-\alpha). \tag{28}$$

Перемѣнная z, которая можетъ измѣняться лишь между $+R$ и $-R$, должна заключаться между предѣлами α и β; въ противномъ случаѣ правая часть равенства (28) стала бы отрицательною. Такимъ образомъ видимъ, что траекторія точки должна быть заключена между двумя параллельными кругами: $z=\alpha$ и $z=\beta$; она будетъ послѣдовательно касаться каждаго изъ нихъ, такъ какъ при z равномъ α или β производная z' обращается въ нуль.

Движеніе точки въ общемъ случаѣ выразится черезъ эллиптическія функціи; мы остановимся лишь на томъ частномъ случаѣ, когда $\alpha=\beta$. Тогда уравненіе (28) обращается въ такое:

$$z'^2 = -\frac{2g}{R^2}(z-\zeta)(z-\alpha)^2.$$

Правая часть для какого либо z, численно меньшаго R и отличнаго отъ α, всегда отрицательна; слѣд. единственное возможное предположеніе

$$z = z_0 = \alpha; \; z' = 0.$$

Точка перемѣщается по параллельному кругу, совершая такъ называемое движеніе конического маятника.

Опредѣлимъ для этого случая законъ измѣненія угла θ. По (24) произвольная постоянная

$$2h = v_0^2 - 2gz_0; \tag{29}$$

слѣд. интегралъ (26) при $z' = 0$ даетъ намъ

$$\theta' = \frac{v_0}{\sqrt{R^2 - z_0^2}}. \tag{30}$$

Но z_0 служитъ кратнымъ корнемъ уравненія: $Q(z) = 0$, слѣд. для $z = z_0$ должна обращаться въ нуль и производная отъ $Q(z)$ по z; т. е. z_0 должно быть корнемъ уравненія

$$3z^2 + 2z\frac{h}{g} - R^2 = 0.$$

Подставляя сюда вмѣсто z его значеніе z_0, а вмѣсто $2h$ выраженіе (29), находимъ

$$v_0^2 = g\frac{R^2 - z_0^2}{z_0}.$$

А потому (30) даетъ

$$\theta' = \sqrt{\frac{g}{z_0}},$$

откуда, интегрируя,

$$\theta - \theta_0 = (t - t_0)\sqrt{\frac{g}{z_0}},$$

если θ_0 значеніе θ для момента t_0.

130. Движеніе по инерціи. Приложимъ уравненія (11) къ рѣшенію задачи о движеніи точки по неподвижной поверхности безъ дѣйствія силъ.

При $F=0$ первое уравненіе (11) даетъ

$$\frac{dv}{dt}=0,$$

т. е. $v=v_0=const.$, движеніе равномѣрное.

Изъ третьяго уравненія (11) вытекаетъ

$$\frac{1}{G}=0;$$

траекторія—геодезическая линія.

Второе уравненіе даетъ величину реакціи:

$$N=m\frac{v_0^2}{R}.$$

Примѣръ: Движеніе точки безъ силъ по цилиндру вращенія; радіусъ ортогональнаго сѣченія равенъ l.

Геодезическою линіею на цилиндрѣ служитъ гелисъ. Пусть касательная къ гелису образуетъ съ плоскостью ортогональнаго сѣченія цилиндра уголъ α. Тогда уравненіе траекторіи:

$$r=r_0=l;\ z-z_0=l\,.\,tg\alpha\,.\,(\theta-\theta_0).$$

Одно изъ главныхъ сѣченій поверхности, очевидно, идетъ по производящей, а другое ортогонально къ производящимъ, слѣд. главные радіусы кривизны ∞ и l. По извѣстной теоремѣ Эйлера кривизна $\frac{1}{R}$ нормальнаго сѣченія черезъ касательную къ гелису будетъ равна $\frac{cos^2\alpha}{l}$, а потому для реакціи имѣемъ выраженія:

$$N=m\frac{v_0^2cos^2\alpha}{l}.$$

131. Движеніе по конусу вращенія. Въ видѣ примѣра на приложеніе уравненій типа (5) займемся задачею о движеніи точки по конусу вращенія. Если мы возьмемъ ось конуса за ось сферическихъ координатъ ρ, φ, ψ, то данная поверхность станетъ одною изъ координатныхъ:

$$\varphi - \alpha = 0: \tag{31}$$

здѣсь α уголъ растворенія даннаго конуса.

Уравненія движенія по (3) § 93 послѣ замѣны φ черезъ α по (31) напишутся такъ:

$$\left.\begin{aligned} & m(\rho'' - \rho\psi'^2 \sin^2\alpha) = F\cos(F, \alpha); \\ & -m\rho\psi'^2 \sin\alpha \cos\alpha = F\cos(F, \beta) + N; \\ & \frac{m}{\rho\sin\alpha}\frac{d}{dt}(\rho^2\psi' \sin^2\alpha) = F\cos(F, \gamma). \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Движеніе точки опредѣляется лишь первымъ и третьимъ изъ этихъ уравненій; второе понадобится тогда, когда пожелаемъ найти реакцію N.

Положимъ, что сила F направлена по оси α и зависитъ лишь отъ разстоянія ρ, т. е. пусть

$$F\cos(F\alpha) = mf(\rho);\ \ F\cos(F\gamma) = 0.$$

Тогда послѣднее изъ уравненій (32) даетъ намъ интегралъ площадей

$$\rho^2\psi' \sin^2\alpha = A; \tag{33}$$

A произвольная постоянная.

Поверхность неподвижна: поэтому имѣемъ еще интегралъ живой силы:

$$\rho'^2 + \rho^2\psi'^2 \sin^2\alpha = 2\Phi(\rho) + 2h; \tag{34}$$

здѣсь

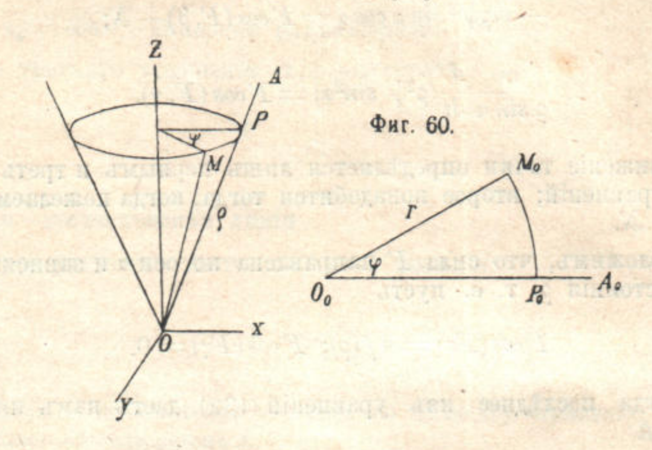
$$\Phi(\rho) = \int f(\rho)\,d\rho.$$

Оба первые интеграла движенія нами найдены; интегрированіе закончится двумя квадратурами. A именно, исключая изъ (34) ψ' съ помощью (33) получимъ дифференціальное уравненіе для ρ, рѣшаемое квадратурою; найдя ρ какъ функцію времени, новою квадратурою опредѣлимъ ψ изъ (33).

Представимъ себѣ, что взятый конусъ развернутъ на плоскость. Пусть производящая OA (Фиг. 60), лежащая въ плоскости xOz, заняла на плоскости положеніе $O_0 A_0$, а какая либо точка M

на конусѣ съ координатами ρ, ψ помѣстилась въ M_0. Положеніе M_0 на плоскости будемъ опредѣлять координатами r и φ, т. е. разстояніемъ M_0 отъ O_0 и угломъ прямой O_0M_0 съ прямой O_0A_0. Замѣтимъ, что при разворачиваніи конуса дуга MP параллели съ радіусомъ $\rho \sin\alpha$ обратится въ дугу M_0P_0 круга радіуса r; при этомъ, однако, длины дугъ не измѣнятся, т. е.

$$\smile MP = \smile M_0P_0.$$



Фиг. 60.

Но MP соотвѣтствуетъ центральный уголъ ψ, а M_0P_0—уголъ φ, слѣд.

$$\rho\psi \sin\alpha = r\varphi.$$

Теперь уже легко получить зависимость между координатами точки M на конусѣ и координатами M_0 (ея изображенія) на разверткѣ:

$$\rho = r;\ \psi \sin\alpha = \varphi. \tag{35}$$

Когда точка M движется по конусу, ея изображеніе M_0 перемѣщается по плоскости. Интегралы движенія (33) и (34) при помощи соотношеній (35) переходятъ въ слѣдующіе интегралы движенія для M_0:

$$r^2\varphi' = A_0;\ r'^2 + r^2\varphi'^2 = 2\Phi(r) + 2h;$$

если

$$A_0 = \frac{A}{\sin\alpha}.$$

Такъ какъ θ' не мѣняетъ своего знака, движеніе точки прогрессивное, т. е. идущее безъ остановокъ въ одну и ту же сторону. Всю окружность точка пробѣгаетъ по (44) и (45) за промежутокъ времени

$$T = 2k\sqrt{\frac{R}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\omega}{\sqrt{1-k^2 sin^2\omega}}.$$

Займемся теперь опредѣленіемъ величины реакціи окружности на точку. Положимъ сначала, что связь позволяетъ точкѣ приблизиться къ центру окружности: маятникъ представляетъ собою тяжелое тѣло, подвѣшенное на нити. Тогда уравненіе связи по условію § 118 будетъ

$$R^2 - x^2 - y^2 \geqq 0. \tag{46}$$

Уравненія движенія въ декартовыхъ координатахъ при выбранныхъ нами осяхъ напишутся такъ:

$$\begin{aligned} mx'' &= -2\lambda x; \\ my'' &= mg - 2\lambda y. \end{aligned} \tag{47}$$

Для опредѣленія λ дифференцируемъ дважды уравненіе (46):

$$xx'' + yy'' + x'^2 + y'^2 = xx'' + yy'' + v^2 = 0.$$

Вставляя сюда изъ (47) и пользуясь равенствомъ (46), найдемъ для λ выраженіе

$$\lambda = \frac{m}{2R^2}(gy + v^2).$$

Реакція N по (30) § 122 опредѣлится изъ равенства:

$$N = 2\lambda R = \frac{m}{R}(gy + v^2).$$

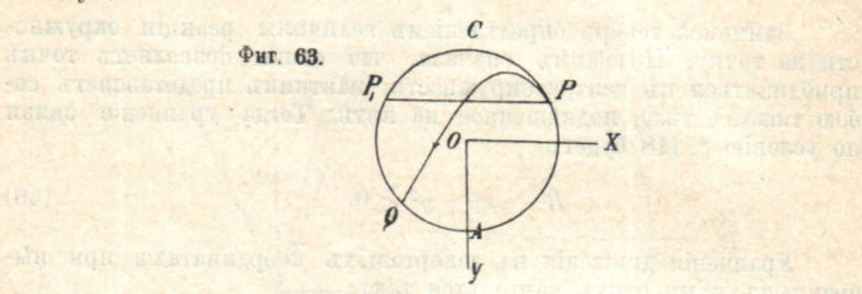
Замѣняя v^2 изъ интеграла живой силы (33), получаемъ:

$$\lambda = \frac{3gm}{2R^2}\left(y - \frac{2}{3}\,\beta\right). \tag{48}$$

Изъ (33) заключаемъ, что всегда

$$y > \beta. \tag{49}$$

Когда $\beta > 0$, то по (49) во все время движенія $y > \frac{2}{3}\beta$, а потому при $\beta > 0$, т. е. когда маятникъ въ своихъ качаніяхъ не ставитъ нити горизонтально, λ всегда положительно и слѣд. (§ 124) точка не можетъ сойти со связи; другими словами нить всегда натянута.



Фиг. 63.

Когда $\beta < 0$, но $\frac{2}{3}\beta > -R$, уровень $y = \frac{2}{3}\beta$ (Фиг. 63) пересѣкаетъ окружность въ точкахъ P и P_1. Лишь только тяжелая точка въ своемъ движеніи дойдетъ до одной изъ этихъ точекъ, λ обращается въ нуль и затѣмъ становится отрицательнымъ, слѣд. здѣсь нить ослабляется, точка сходитъ со связи и падаетъ по параболѣ PQ, пока въ точкѣ Q снова не придетъ на связь.

Когда $\beta < 0$ и при томъ $\frac{2}{3}\beta < -R$, уровень $y = \frac{2}{3}\beta$ проходитъ выше окружности, слѣд. y всегда больше $\frac{2}{3}\beta$, а потому по (48) во все время движенія нить натянута.

Если окружность позволяетъ точкѣ произвольно удалиться отъ центра—тяжелая точка катится по обручу—то уравненіе связи по условію § 118 будетъ:

$$x^2 + y^2 - R^2 \geqq 0;$$

а потому новыя уравненія движенія:

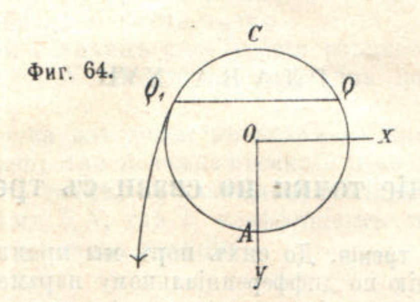
$$mx'' = 2\lambda x;$$

$$my'' = mg + 2\lambda y;$$

отличаются отъ (47) лишь знакомъ при λ. Для этого множителя мы найдемъ теперь выраженіе:

$$\lambda = \frac{3mg}{2R^2}\left(\frac{2}{3}\beta - y\right). \tag{50}$$

Фиг. 64.



Движеніе точки по связи возможно только въ томъ случаѣ, когда соблюдено условіе

$$\frac{2}{3}\beta > y;$$

но по (49) $\beta < y$ и, кромѣ того, по (33) всегда $y > -R$, слѣд. $\frac{2}{3}\beta$ должно быть $> -R$. Уровень $y = \frac{2}{3}\beta$ пересѣкаетъ тогда окружность (Фиг. 64) въ точкахъ Q и Q_1. Движеніе возможно лишь по дугѣ сегмента QCQ_1. Въ точкахъ Q и Q_1, если скорость направлена книзу, тяжелая точка сходитъ со связи и падаетъ по параболѣ. Во всякихъ другихъ положеніяхъ не на дугѣ QCQ_1 и при всякихъ иныхъ начальныхъ условіяхъ (другомъ β) тяжелая точка немедленно оставляетъ связь.

ГЛАВА XVII.

Движеніе точки по связи съ треніемъ.

137. Законы тренія. До сихъ поръ мы принимали, что связь оказываетъ реакцію по дифференціальному параметру перваго порядка (§ 122); эта реакція вполнѣ опредѣляется, когда намъ дано аналитическое уравненіе связи. Но можетъ случиться, что связь оказываетъ реакцію на матеріальную точку и въ плоскости, перпендикулярной къ дифференціальному параметру; тогда законы, управляющіе такою реакціею, не могутъ быть найдены только изъ аналитической формы связи, а должны быть опредѣлены изъ другихъ источниковъ, напр. при помощи наблюденій и опыта—другими словами, реакціи такого рода представляютъ собою, собственно говоря, заданныя силы. Къ нимъ принадлежитъ и такъ называемая сила тренія.

Законы тренія относятся къ заимодѣйствію двухъ тѣлъ, соприкасающихся другъ съ другомъ и движущихся другъ относительно друга; принимая, что матеріальная точка представляетъ собою весьма малое тѣло, мы можемъ результаты опытовъ надъ трущимися тѣлами приложить и къ матеріальной точкѣ.

Когда движеніе точки по данной поверхности или линіи сопровождается треніемъ, то поверхность или линія называются шероховатыми.

Законы тренія для движенія матеріальной точки по неподвижной шероховатой поверхности слѣдующіе:

1) Сила тренія направлена прямо противоположно скорости точки.

2) Величина силы тренія равняется kN, гдѣ k нѣкоторая постоянная, называемая коэффиціентомъ тренія, а N абсолютная величина нормальной реакціи поверхности.

3) Когда точка находится на поверхности въ покоѣ, сила тренія равняется абсолютной величинѣ проекціи равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на касательную къ поверхности плоскость и направлена прямо противоположно этой проекціи; но по своей величинѣ сила тренія не можетъ превышать k_1N, гдѣ k_1

нѣкоторая постоянная, называемая **коэффиціентомъ статическаго тренія**, а N нормальная реакція связи.

Вообще говоря, $k_1 > k$.

Для движенія точки по шероховатой кривой предъидущіе законы измѣнятся такъ:

1) Сила тренія всегда направлена по касательной къ кривой прямопротивоположно скорости точки.

2) По своей величинѣ сила тренія равняется kN, гдѣ k коэффиціентъ тренія, а N абсолютная величина нормальной реакціи кривой.

3) Когда точка находится въ покоѣ на кривой, то сила тренія равна и прямопротивоположна проекціи равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ точкѣ, на касательную къ кривой, но не можетъ быть больше, чѣмъ $k_1 N$, гдѣ k_1 коэффиціентъ статическаго тренія, а N абсолютная величина реакціи.

138. Дифференціальныя уравненія движенія точки по шероховатой поверхности. Пусть уравненіе данной поверхности

$$f(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Тогда по §§ 126 и 137 уравненія движенія точки массы m въ декартовыхъ координатахъ будутъ:

$$mx'' = X + \lambda \frac{\partial f}{\partial x} \mp k\lambda\Delta f \frac{x'}{v};$$

$$my'' = Y + \lambda \frac{\partial f}{\partial y} \mp k\lambda\Delta f \frac{y'}{v}; \tag{2}$$

$$mz'' = Z + \lambda \frac{\partial f}{\partial z} \mp k\lambda\Delta f \frac{z'}{v}.$$

Здѣсь k коэффиціентъ тренія, $v = +\sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$; прочія обозначенія тѣ же, что и въ формулахъ (2) главы XV. Знакъ при k противоположенъ знаку у λ.

Если же отнести уравненія движенія къ подвижнымъ осямъ формулъ (11) главы XV, то при тѣхъ же обозначеніяхъ получимъ

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos(F, T) \pm kN;$$

$$m\frac{v^2}{R} = F\cos(F, n) + N; \tag{3}$$

$$\pm m\frac{v^2}{G} = F\cos(F, \tau).$$

И здѣсь знакъ при k противоположенъ знаку реакціи N.

139. Движеніе тяжелой точки по шероховатой наклонной плоскости. Возьмемъ начало координатъ на данной плоскости, наклоненной подъ угломъ J къ горизонтальной. Направимъ Ox горизонтально по той же плоскости, а Oy проведемъ книзу по линіи главнаго ската, т. е. перпендикулярно къ линіямъ пересѣченія данной плоскости горизонтальными. Разсмотримъ движеніе тяжелой точки по взятой наклонной плоскости, предполагая, что послѣдняя шероховата. При выбранныхъ осяхъ уравненіе плоскости будетъ:

$$z = 0 \tag{4}$$

Уравненія движенія по (2) и (4) напишутся такъ:

$$mx'' = -k\lambda \frac{x'}{v};$$

$$my'' = mg \sin J - k\lambda \frac{y'}{v}; \tag{5}$$

$$mz'' = 0 = -mg \cos J + \lambda.$$

Oz направлена по нормали къ плоскости кверху; g ускореніе тяжести.

Изъ послѣдняго уравненія (5) находимъ

$$\lambda = mg \cos J.$$

Подставляя въ первыя два уравненія (5) и сокращая на массу, имѣемъ

$$x'' = -\frac{kg \cos J}{v} x';$$

$$y'' = g \sin J - \frac{kg \cos J}{v} y'.$$

Для сокращенія полагаемъ:

$$g \sin J = \gamma; \; kg \cos J = K\gamma; \tag{6}$$

откуда

$$K = k \cot g J. \tag{7}$$

При такихъ обозначеніяхъ уравненія движенія перепишутся слѣдующимъ образомъ:

$$x'' = -K\gamma \frac{x'}{v};$$
$$y'' = \gamma\left(1 - K\frac{y'}{v}\right). \tag{8}$$

Означимъ черезъ φ уголъ скорости v съ Ox, т. е. положимъ:

$$x' = \frac{dx}{dt} = v\cos\varphi;\ y' = \frac{dy}{dt}\, v\sin\varphi. \tag{9}$$

Тогда окажется

$$x'' = \frac{dv}{dt}\cos\varphi - v\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt};$$
$$y'' = \frac{dv}{dt}\sin\varphi + v\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt};$$

Подставляя отсюда въ (8), найдемъ

$$\frac{dv}{dt}\cos\varphi - v\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt} = -K\gamma\cos\varphi;$$
$$\frac{dv}{dt}\sin\varphi + v\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt} = \gamma(1 - K\sin\varphi).$$

Опредѣляемъ производныя $\frac{dv}{dt}$ и $\frac{d\varphi}{dt}$:

$$\frac{dv}{dt} = -K\gamma + \gamma\sin\varphi;$$
$$v\frac{d\varphi}{dt} = \gamma\cos\varphi. \tag{10}$$

Изъ этихъ уравненій выводимъ:

$$\frac{dv}{v} = (tg\,\varphi - K\sec\varphi)\,d\varphi.$$

Интегрируя, находимъ:

$$\log v = -\log\cos\varphi + K\log tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + \log 2C,$$

гдѣ C произвольное постоянное, или

$$v = 2C\frac{tg^K\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos\varphi}. \tag{11}$$

Пусть

$$tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \eta; \tag{12}$$

тогда

$$\cos\varphi = \sin 2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{2\eta}{1+\eta^2},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2} - 2\,arctg\eta; \tag{13}$$

и слѣд. по (11):

$$v = C\eta^{K-1}\left(1+\eta^2\right) = C\left(\eta^{K-1} + \eta^{K+1}\right). \tag{14}$$

Изъ (13) вытекаетъ:

$$d\varphi = -\frac{2d\eta}{1+\eta^2}; \tag{15}$$

поэтому для опредѣленія t по (10) имѣемъ уравненіе

$$dt = \frac{vd\varphi}{\gamma\cos\varphi} = -\frac{C}{\gamma}\eta^{K-2}(1+\eta^2)\,d\eta,$$

и слѣдовательно:

$$t - t_1 = -\frac{C}{\gamma}\left(\frac{\eta^{K-1}}{K-1} + \frac{\eta^{K+1}}{K+1}\right), \tag{16}$$

гдѣ t_1 произвольная постоянная.

Чтобы окончить задачу, остается еще найти x и y какъ функціи отъ η. Изъ (9) и (10) имѣемъ:

$$dx = v \cos \varphi \, dt = -\frac{2C^2}{\gamma} \eta^{2K-2} (1 + \eta^2) \, d\eta;$$

$$dy = v \sin \varphi \, dt = -\frac{C^2}{\gamma} \eta^{2K-3} (1 - \eta^4) \, d\eta;$$

Отсюда, интегрируя, находимъ:

$$x - x_1 = -\frac{2C^2}{\gamma} \left(\frac{\eta^{2K-1}}{2K-1} + \frac{\eta^{2K+1}}{2K+1} \right); \tag{17}$$

$$y - y_1 = -\frac{C^2}{\gamma} \left(\frac{\eta^{2K-2}}{2K-2} + \frac{\eta^{2K+2}}{2K+2} \right); \tag{18}$$

гдѣ x_1 и y_1 постоянныя произвольныя.

Пусть постоянная K, равная $k \, cotg \, J$ по (7), больше единицы:

$$K > 1. \tag{19}$$

Тогда видимъ, что v по (14) обращается въ нуль для $\eta = 0$. Случится это по (16) въ моментъ $t = t_1$, когда точка придетъ въ положеніе $x = x_1$, $y = y_1$ по (17) и (18). Нормальная реакція связи N по (5) равняется $mg \cos J$, а проекція равнодѣйствующей на плоскость равна $mg \sin J$, слѣд. отношеніе

$$\frac{mg \sin J}{N} = tg \, J < k,$$

по (19); а потому движущаяся точка въ положеніи (x_1, y_1) останется въ покоѣ (§ 137) и слѣд. въ моментъ $t = t_1$ движеніе пріостановится.

Если

$$1 > K > \frac{1}{2},$$

то для $\eta = 0$ находимъ $t = \infty$, но $x = x_1$; слѣд. движеніе не прекращается, но траекторія имѣетъ асимптоту, параллельную Oy.

Наконецъ, при условіи

$$\frac{1}{2} > K,$$

движеніе происходитъ безостановочно и траекторія асимптоты не имѣетъ.

140. Движеніе точки по шероховатой поверхности по инерціи. Положимъ, что матеріальная точка движется по шероховатой поверхности безъ приложенныхъ силъ. Примѣняя сюда уравненія типа (3), находимъ:

$$m\frac{dv}{dt} = -kN; \quad \frac{mv^2}{R} = N; \quad \frac{mv^2}{G} = 0.$$

Послѣднее уравненіе опредѣляетъ собою траекторію: она оказывается геодезическою линіею, какъ и для поверхности гладкой. Исключая изъ первыхъ двухъ уравненій реакцію N, имѣемъ:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{kv^2}{R}.$$

Замѣчаемъ, что $v\,dt = ds$, если ds элементъ дуги траекторіи; слѣд.

$$\frac{2v\,dv}{v^2} = -2k\frac{ds}{R}.$$

Отсюда, интегрируя:

$$v^2 = C e^{-2k\int \frac{ds}{R}},$$

гдѣ C произвольная постоянная. Иначе

$$v^2 = v_0{}^2 e^{-2k\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{R}},$$

если v_0 начальная скорость, соотвѣтствующая дугѣ s_0.

141. Дифференціальныя уравненія движенія точки по шероховатой кривой. Возьмемъ дифференціальныя уравненія движенія точки

по кривой въ формѣ (10) § 132; тогда по § 137 при прежнихъ обозначеніяхъ найдемъ:

$$m\frac{dv}{dt}=F\cos(FT)\mp kN;$$

$$m\frac{v^2}{\rho}=F\cos(F\rho)+N\cos(N\rho); \tag{20}$$

$$0=F\cos(Fn)+N\cos(Nn).$$

Знакъ у k противоположенъ знаку при N.

Когда кривая плоская и сила F лежитъ въ той же плоскости, послѣднее изъ уравненій (20) показываетъ, что вся реакція направлена по радіусу кривизны ρ.

142. Движеніе тяжелой точки по вертикальной шероховатой циклоидѣ. Пусть тяжелая точка движется по вертикальной шероховатой циклоидѣ, обращенной вершиною книзу. При соотвѣтственно выбранныхъ осяхъ уравненіе циклоиды по (16) § 134 можемъ написать такъ:

$$x=R(2\psi+\sin 2\psi);$$

$$y=R(1+\cos 2\psi);$$

если въ формулахъ (16) § 134 положимъ $\omega=2\psi$. Параллельно съ этимъ изъ того же § 134 имѣемъ выраженія

$$s=4R\sin\psi;\ \rho=4R\cos\psi; \tag{21}$$

здѣсь ρ радіусъ кривизны, а s длина дуги, считаемая отъ вершины, т. е. самой нижней точки кривой.

Предположимъ, что движеніе точки началось изъ состоянія покоя; тогда проекція скорости v на касательную въ сторону движенія (книзу) будетъ $-\frac{ds}{dt}$, такъ какъ дуга s убываетъ, а потому

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{d^2s}{dt^2}=-s''$$

и слѣд. уравненія (20) въ нашемъ случаѣ даютъ:

$$\frac{dv}{dt}=-s''=g\sin\psi-kR;$$

$$\frac{v^2}{\rho}=\frac{s'^2}{\rho}=-g\cos\psi+R. \tag{22}$$

Здѣсь g ускореніе тяжести, $R = \frac{1}{m} N$.

Исключая изъ (22) реакцію R, получаемъ:

$$s'' = \frac{k}{\rho} s'^2 - g(\sin\psi - k\cos\psi).$$

Вставляемъ сюда значенія для s и ρ изъ (21) и полагаемъ

$$k = tg\,\lambda.$$

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$-\cos\psi\,.\,\psi'' + \frac{\sin(\psi+\lambda)}{\cos\lambda}\psi'^2 = \frac{g}{4R\cos\lambda}\sin(\psi-\lambda).$$

Вводимъ новую перемѣнную φ, принимая

$$\varphi = \psi - \lambda; \tag{24}$$

тогда по раздѣленіи на $\cos\lambda$ легко приведемъ предъидущее уравненіе къ виду:

$$-\cos\varphi\,.\,\varphi'' + \sin\varphi\,.\,k\,.\,\varphi'' + \sin\varphi\,.\,\varphi'^2 + 2k\cos\varphi\,.\,\varphi'^2 - k^2\sin\varphi\,.\,\varphi'^2 =$$
$$= \frac{g}{4R\cos^2\lambda}\sin\varphi.$$

Умножаемъ обѣ части уравненія на $e^{-k\varphi}$; видимъ, что оно можетъ быть преобразовано такъ:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{-k\varphi}\sin\varphi\right) + \frac{g}{4R\cos^2\lambda}e^{-k\varphi}\sin\varphi = 0.$$

Общій интегралъ этого уравненія легко находится въ видѣ:

$$e^{-k\varphi}\sin\varphi = A\cos(\gamma t + B),$$

гдѣ A и B постоянныя произвольныя, а

$$\gamma = \frac{1}{2\cos\lambda}\sqrt{\frac{g}{R}}. \tag{25}$$

Такъ какъ по условію въ начальный моментъ ($t=0$) точка была въ покоѣ ($\varphi_0'=0$), то постоянная $B=0$; и слѣд. интегралъ въ окончательной формѣ:

$$e^{-k\varphi}\sin\varphi = A\cos\gamma t.$$

По истеченіи времени

$$T=\frac{\pi}{2\gamma}=\pi\cos\lambda\sqrt{\frac{R}{g}}$$

точка придетъ въ положеніе $\varphi=0$ со скоростью $\varphi'=A\gamma$. Такъ какъ промежутокъ T не зависитъ отъ начальныхъ условій, движеніе обладаетъ свойствомъ таутохронности. Замѣтимъ, что въ положеніи $\varphi=0$ тяжелая точка на кривой можетъ быть въ равновѣсіи. На самомъ дѣлѣ тогда $\psi=\lambda$ по (24), и слѣд. N по (22) равняется $mg\cos\lambda$, такъ какъ $v=0$; проекція равнодѣйствующей F на касательную T выражается такъ:

$$F\cos(F\,T)=mg\sin\psi=mg\sin\lambda.$$

А потому отношеніе

$$\frac{F\cos(F\,T)}{N}=tg\,\lambda=k,$$

т. е. условіе § 137 выполняется.

ГЛАВА XVIII.

Относительное движеніе матеріальной точки.

143. Дифференціальныя уравненія относительнаго движенія матеріальной точки. Положимъ, что разсматриваемая матеріальная точка m движется одновременно въ двухъ средахъ S и Σ, и пусть намъ дано движеніе Σ въ S, тогда движеніе m въ Σ называется относительнымъ (§ 79). Въ § 79 было показано, какъ это движеніе находится, если извѣстны движенія абсолютное и переносное. Но можно также и непосредственно опредѣлить относительное движеніе интегрированіемъ дифференціальныхъ уравненій для этого движенія. Чтобы составить эти уравненія, припомнимъ, что положеніе точки m въ средѣ Σ опредѣляется посредствомъ координатъ ξ, η, ζ (§ 79), взятыхъ относительно осей $A\xi\eta\zeta$ неизмѣнно съ тѣломъ Σ связанныхъ; слѣд. искомыя уравненія будутъ содержать въ себѣ ξ, η, ζ, какъ неизвѣстныя функціи времени. По теоремѣ Коріолиса (§ 81) ускореніе относительное $\dot{u}$ такъ связано съ ускореніями абсолютнымъ $\dot{v}$, переноснымъ $\dot{w}$ и поворотнымъ k:

$$(\dot{u}) = (\dot{v}) - (\dot{w}) + (k). \qquad (1)$$

Станемъ проектировать эти векторы на $A\xi$. Тогда по (6) § 81:

$$\dot{u} \cos(\dot{u}\,\xi) = \xi''.$$

Если проекціи равнодѣйствующей силъ, приложенныхъ къ m, на оси $A\xi\eta\zeta$ означимъ соотвѣтственно Ξ, Υ, Z, то по второму закону Ньютона, имѣемъ

$$\dot{v} \cos(\dot{v}\,\xi) = \frac{1}{m}\,\Xi,$$

гдѣ m масса точки.

Переносное ускореніе по опредѣленію представляетъ собою ускореніе той точки твердаго тѣла Σ, которая въ разсматриваемый моментъ совпадаетъ съ движущеюся, слѣд. проекціи этого ускоренія найдутся изъ (4) § 77:

$$\dot{w}\cos(\dot{w}\,\xi) = \alpha + \zeta q' - \eta r' + p(p\xi + q\eta + r\zeta) - \xi\Omega^2,$$

если проекціи поступательнаго ускоренія на оси $A\xi\eta\zeta$ означимъ для сокращенія черезъ $\alpha, \alpha', \alpha''$.

Наконецъ ускореніе поворотное по § 81 даетъ проекцію:

$$k\cos(k\,\xi) = 2(\eta' r - \zeta' q).$$

Собирая все вышесказанное, по (1) находимъ:

$$\xi'' = \frac{1}{m}\Xi - \alpha - \zeta q' + \eta r' - p(p\xi + q\eta + r\zeta) + \xi\Omega^2 + 2(\eta' r - \zeta' q). \quad (2)$$

Сюда присоединяются еще два уравненія:

$$\eta'' = \frac{1}{m}\Upsilon - \alpha' - \xi r' + \zeta p' - q(p\xi + q\eta + r\zeta) + \eta\Omega^2 + 2(\zeta' p - \xi' r);$$

$$(2')$$

$$\zeta'' = \frac{1}{m}Z - \alpha'' - \eta p' + \xi q' - r(p\xi + q\eta + r\zeta) + \zeta\Omega^2 + 2(\xi' q - \eta' p).$$

Полученныя равенства (2) и представляютъ собою искомыя дифференціальныя уравненія относительнаго движенія свободной матеріальной точки.

Если точка не свободна, а **лежитъ на связи**:

$$f(\xi, \eta, \zeta, t) = 0, \quad (3)$$

то уравненія (2) по § 123 перейдутъ въ слѣдующія:

$$\xi'' = \frac{1}{m}\Xi - \alpha - \zeta q' - \eta r' - p(p\xi + q\eta + r\zeta) + \xi\Omega^2 + 2(\eta' r - \zeta' q) + \lambda\frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

$$\eta'' = \frac{1}{m}\Upsilon - \alpha' - \ldots\ldots + \lambda\frac{\partial f}{\partial \eta};\quad \zeta'' = \frac{1}{m}Z - \alpha'' - \ldots\ldots + \lambda\frac{\partial f}{\partial \zeta}. \quad (4)$$

Интегрированіе этихъ уравненій ведется пріемомъ, указаннымъ въ § 123. Для исключенія неизвѣстной функціи λ придется воспользоваться равенствомъ

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = \frac{\partial f}{\partial \xi}\xi'' + \frac{\partial f}{\partial \eta}\eta'' + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\zeta'' + D_2 f = 0,$$

куда надо вставить значенія ξ'', η'', ζ'', изъ (4); тогда λ и найдется какъ функція аргументовъ t, ξ, η, ζ, ξ', η', ζ'.

Когда связей не одна, а двѣ:

$$f(\xi, \eta, \zeta, t) = 0; \; f_1(\xi, \eta, \zeta, t) = 0,$$

то къ правымъ частямъ уравненій (4) присоединятся члены

$$\lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \xi}, \; \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \eta}, \; \lambda_1 \frac{\partial f_1}{\partial \zeta};$$

исключеніе множителей λ_1 и λ надо сдѣлать по пріему § 125.

144. Интегралъ, производный отъ интеграла живой силы. Пусть силы, приложенныя къ точкѣ, имѣютъ потенціалъ, т. е.

$$\Xi = \frac{\partial U}{\partial \xi}; \; \Upsilon = \frac{\partial U}{\partial \eta}; \; Z = \frac{\partial U}{\partial \zeta};$$

а переносное движеніе сводится къ постоянному вращенію около оси, не измѣняющей своего положенія въ тѣлѣ и движущейся безъ ускоренія; въ такомъ случаѣ для уравненій (4), если связь явно не содержитъ времени:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{5}$$

можно получить интегралъ, аналогичный интегралу живой силы.

Выбираемъ полюсъ A на оси вращенія; тогда по условію:

$$\alpha = \alpha' = \alpha'' = 0.$$

Далѣе p, q, r, ω постоянны; поэтому

$$p' = q' = r' = 0.$$

Умножаемъ уравненія (4) соотвѣтственно на ξ', η', ζ' и складываемъ:

$$\xi'\xi'' + \eta'\eta'' + \zeta'\zeta'' = \frac{1}{m}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial U}{\partial \eta}\eta' + \frac{\partial U}{\partial \zeta}\zeta'\right) -$$
$$-(p\xi + q\eta + r\zeta)(p\xi' + q\eta' + r\zeta') + \Omega^2(\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta') +$$
$$+ \lambda\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\xi' + \frac{\partial f}{\partial \eta}\eta' + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\zeta'\right).$$

Коэффиціентъ при λ обращается въ нуль въ силу соотношенія между относительными скоростями:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial \xi}\xi'+\frac{\partial f}{\partial \eta}\eta'+\frac{\partial f}{\partial \zeta}\zeta'+\frac{\partial f}{\partial t}=0,$$

и условія (5), остальные же члены представляютъ собою полныя производныя по времени:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(\xi'^2+\eta'^2+\zeta'^2)=\frac{d}{dt}\frac{1}{2}u^2=\frac{1}{m}\frac{dU}{dt}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\Omega^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-(p\xi+q\eta+r\zeta)^2]. \qquad (6)$$

Если замѣтимъ, что

$$p=\Omega\cos(\Omega\xi);\ q=\Omega\cos(\Omega\eta);\ r=\Omega\cos(\Omega\zeta);$$

$$\xi=\rho\cos(\rho\xi);\ \eta=\rho\cos(\rho\eta);\ \zeta=\rho\cos(\rho\zeta);$$

то легко видѣть, что

$$\Omega^2(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)-(p\xi+q\eta+r\zeta)^2=\Omega^2\rho^2\sin^2(\rho\Omega).$$

Интегрируя (6), и опредѣлимъ искомое выраженіе:

$$\frac{m}{2}[u^2-\Omega^2\rho^2\sin^2(\Omega\rho)]=U+h, \qquad (7)$$

гдѣ h произвольная постоянная.

145. Движеніе тяжелой точки по отношенію къ вращающейся землѣ. Въ видѣ примѣра разсмотримъ движеніе тяжелой матеріальной точки по отношенію къ вращающейся землѣ. Ускореніе g, сообщаемое точкѣ притяженіемъ земли, мы принимаемъ за постоянное относительно подвижныхъ осей $A\xi\eta\zeta$. Начало этихъ осей взято въ томъ мѣстѣ земной поверхности, близъ котораго происходитъ движеніе; въ большинствѣ случаевъ мы будемъ полагать, что A совпадаетъ съ начальнымъ положеніемъ точки. Сами же оси неизмѣнно связаны съ землею.

По формулѣ (1) ускореніе относительное $\dot{u}$ разсматриваемой тяжелой точки такъ выражается черезъ ускореніе абсолютное $\dot{v}$, переносное $\dot{w}$ и поворотное k:

$$(\dot{u})=(\dot{v})-(\dot{w})+(k). \qquad (8)$$

Проекціями вектора $\dot{u}$ на оси $A\xi\eta\zeta$ служатъ соотвѣтственно количества:

$$\xi'', \eta'', \zeta''. \tag{9}$$

Ускореніе абсолютное $\dot{v}$ тяжелой точки слагается изъ двухъ: ускоренія тяжести g, направленнаго къ центру земли, если землю примемъ за однородную сферу, и ускоренія, зависящаго отъ притяженія точки солнцемъ по Ньютонову закону, равнаго

$$\frac{\varepsilon^2 M}{d^2}, \tag{10}$$

направленнаго къ центру солнца, если и солнце будемъ считать однородною сферою. Здѣсь M масса солнца, d разстояніе отъ тяжелой точки до солнечнаго центра, а ε^2 постоянная, равная силѣ притяженія между двумя массами по одному грамму, находящимися другъ отъ друга на разстояніи, равномъ одному сантиметру. Такимъ образомъ

$$(\dot{v}) = (g) + \left(\frac{\varepsilon^2 M}{d^2}\right), \tag{11}$$

а проекціи $\dot{v}$ на оси $A\xi\eta\zeta$ будутъ соотвѣтственно:

$$g\cos(g\xi) - \varepsilon^2 \frac{M}{d^2}\cos(d\xi),\ \ d\cos(g\eta) - \varepsilon^2 \frac{M}{d^2}\cos(d\eta),$$

$$g\cos(g\zeta) - \varepsilon^2 \frac{M}{d^2}\cos(d\zeta), \tag{12}$$

если направленіе d идетъ отъ солнца къ точкѣ.

Переносное ускореніе $\dot{w}$ (§§ 76 и 77) слагается изъ трехъ ускореній: поступательнаго, вращательнаго и центростремительнаго.

Если бы мы за полюсъ взяли центръ земли, то полное движеніе земли слагалось бы изъ поступательнаго движенія съ ускореніемъ, зависящемъ отъ притяженія земли солнцемъ, и изъ постояннаго вращенія съ угловою скоростью Ω около оси, идущей отъ сѣвернаго полюса къ южному. Явленія прецессіи и нутаціи въ разсчетъ не принимаются. Постоянная угловая скорость Ω равна (§ 81)

$$0{,}0000729 \frac{1}{сек.\ ср.\ вр.}.$$

Въ виду малости Ω мы будемъ пренебрегать членами, зависящими отъ Ω^2, если только коэффиціентъ при нихъ не очень великъ, напр. не содержитъ радіуса земли.

Вышеупомянутое ускореніе поступательнаго движенія при нашихъ предположеніяхъ (земля и солнце однородныя сферы) представится такъ:

$$\varepsilon^2 \frac{M}{D^2}, \tag{13}$$

гдѣ M по прежнему масса солнца, а D разстояніе между центрами солнца и земли. Ускореніе (13) направлено отъ земли къ солнцу. Проекціи его на оси $A\xi\eta\zeta$ будутъ:

$$-\varepsilon^2 \frac{M}{D^2} cos(D\xi), \quad -\varepsilon^2 \frac{M}{D^2} cos(D\eta), \quad -\varepsilon^2 \frac{M}{D^2} cos(D\zeta). \tag{14}$$

если направленіе D идетъ отъ солнца къ землѣ.

Но мы за полюсъ беремъ не центръ земли, а точку A; при этомъ (§ 68) величина и направленіе вектора Ω не измѣнятся, но поступательная часть движенія станетъ иною. Для нахожденія поступательнаго ускоренія при полюсѣ, выбранномъ въ точкѣ A, необходимо къ ускоренію (13) прибавить геометрически то ускореніе, которое имѣетъ точка A въ своемъ вращательномъ движеніи вокругъ прежняго полюса, центра земли. Это добавочное ускореніе въ свою очередь слагается изъ двухъ: вращательнаго и центростремительнаго. Первое, вращательное, равно нулю, такъ какъ векторъ Ω мы считаемъ постояннымъ, а второе равно $\Omega^2\delta$, гдѣ δ разстояніе точки A отъ земной оси; направленіе δ идетъ отъ точки A къ оси. Такимъ образомъ, при полюсѣ въ A поступательное ускореніе равно геометрической суммѣ

$$\left(\varepsilon^2 \frac{M}{D^2}\right) + (\Omega^2\delta) \tag{15}$$

и имѣетъ своими проекціями на оси $A\xi\eta\zeta$ слѣдующія выраженія:

$$-\varepsilon^2 \frac{M}{D^2} cos(D\xi) + \Omega^2 \delta cos(\delta\xi), \quad -\varepsilon^2 \frac{M}{D^2} cos(D\eta) + \Omega^2 \delta cos(\delta\eta),$$

$$-\varepsilon^2 \frac{M}{D^2} cos(D\zeta) + \Omega^2 \delta cos(\delta\zeta). \tag{16}$$

Полное переносное ускореніе w получится изъ (15), если мы прибавимъ сюда геометрически еще ускоренія вращательное и

центростремительное той точки, неизмѣнно связанной съ землею, которая въ данный моментъ совпадаетъ съ разсматриваемою тяжелою точкою. При подчисленіи названныхъ ускореній надо помнить, что мгновенная ось проходитъ черезъ полюсъ A; поэтому въ виду постоянства Ω и малости численной величины этого вектора оба добавочныя ускоренія обращаются въ нуль, и слѣд. въ нашей степени приближенія выраженіе (15) даетъ полную величину всего ускоренія переносснаго.

Наконецъ по (10) § 81 проекціи ускоренія поворотнаго k будутъ

$$2(\eta' r - \zeta' q),\ 2(\zeta' p - \xi' r),\ 2(\xi' q - \eta' p). \tag{17}$$

Теперь вмѣсто (8) имѣемъ:

$$(\dot{u}) = (g) + \left(\varepsilon^2 \frac{M}{d^2}\right) - \left(\varepsilon^2 \frac{M}{D^2}\right) - (\Omega^2 \delta) + (k). \tag{18}$$

Въ виду громадности разстоянія солнца отъ земли въ сравненіи съ земнымъ радіусомъ мы принимаемъ, что ускоренія (10) и (13) равны по величинѣ и одинаково направлены, слѣд. второй и третій члены правой части геометрическаго равенства (18) взаимно сокращаются.

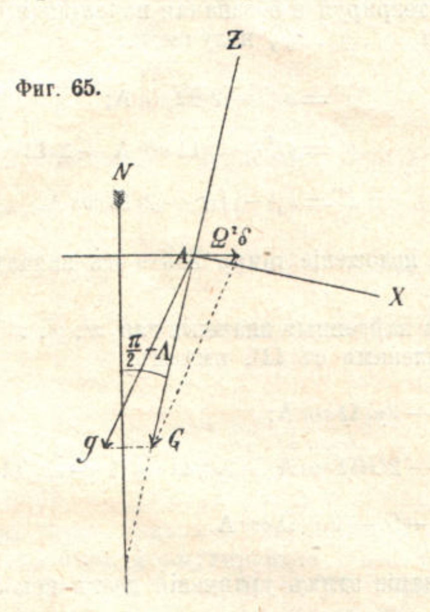
Принимая въ соображеніе все вышесказанное, а также формулы (12), (16) и (17), пишемъ по (18) уравненія относительнаго движенія тяжелой точки въ такомъ видѣ:

$$\begin{aligned} \xi'' &= g \cos(g\,\xi) - \Omega^2 \delta \cos(\delta\,\xi) - 2(\zeta' q - \eta' r); \\ \eta'' &= g \cos(g\,\eta) - \Omega^2 \delta \cos(\delta\,\eta) - 2(\xi' r - \zeta' p); \\ \zeta'' &= g \cos(g\,\zeta) - \Omega^2 \delta \cos(\delta\,\zeta) - 2(\eta' p - \xi' q). \end{aligned} \tag{19}$$

Здѣсь, по условію, изъ всѣхъ членовъ, содержавшихъ Ω^2, сохранены лишь тѣ, при которыхъ стоитъ множитель δ, такъ какъ разстояніе δ при низкихъ широтахъ сравнимо съ радіусомъ экватора.

Разсмотримъ векторъ G—геометрическую разность вектора g и вектора $\Omega^2 \delta$, идущаго къ земной оси. Иначе этотъ векторъ G (Фиг. 65) равенъ геометрической суммѣ векторовъ g и $\Omega^2 \delta$, если послѣднему дадимъ направленіе отъ земной оси (ускореніе центробѣжное). Очевидно, векторъ G представляетъ собою видимое (наблюдаемое) ускореніе вѣса на земной поверхности; направленіе G совпадаетъ съ направленіемъ отвѣса въ разсматриваемомъ мѣстѣ.

Оставивъ прежнее начало A, замѣнимъ оси $A\xi\eta\zeta$ осями $AXYZ$, причемъ направимъ AZ (Фиг. 65) прямопротивоположно G (къ зениту); ось AX пусть идетъ въ плоскости меридіана къ югу; тогда AY будетъ направлена къ западу. Уголъ оси AZ съ плоскостью



Фиг. 65.

земного экватора называется астрономической широтою мѣста A; означимъ эту широту черезъ Λ. Такъ какъ ось земли идетъ отъ сѣвернаго полюса N (Фиг. 65) къ южному S и лежитъ въ плоскости меридіана (плоскости чертежа), то, очевидно, она образуетъ съ AZ уголъ $\frac{\pi}{2}+\Lambda$ и слѣд.

$$p=\Omega \cos\Lambda;\ q=0;\ r=-\Omega \sin\Lambda.$$

Поэтому для новыхъ осей $AZYX$ уравненія (9) перепишутся такъ:

$$x''=-2y'\,\Omega \sin\Lambda;$$
$$y''=2\,x'\,\Omega \sin\Lambda+2\,z'\,\Omega \cos\Lambda;$$
$$z''=-G-2y'\,\Omega \cos\Lambda. \quad (20)$$

Это и будутъ уравненія относительнаго движенія тяжелой точки при нашихъ допущеніяхъ.

Выводя уравненія (20), мы пренебрегали членами, зависящими отъ Ω^2; съ тою же степенью точности мы можемъ примѣнить для интегрированія этихъ уравненій слѣдующій пріемъ. Каждая часть уравненій (20) представляетъ собою полную производную по времени. Интегрируя и обозначая начальныя скорости по осямъ для $t=0$ черезъ x_0', y_0', z_0', получаемъ:

$$x' = x_0' - 2y\Omega \sin \Lambda;$$

$$y' = y_0' + 2x\Omega \sin \Lambda + 2z\Omega \cos \Lambda;$$

$$z' = z_0' - Gt - 2y\Omega \cos \Lambda.$$

Начальное положеніе точки взято въ началѣ координатъ A: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$.

Подставляя найденныя значенія для x', y', z' въ уравненія (20) и пренебрегая членами съ Ω^2, имѣемъ:

$$x'' = -2y_0'\Omega \sin \Lambda;$$

$$y'' = -2Gt\Omega \cos \Lambda + 2x_0'\Omega \sin \Lambda + 2z_0'\Omega \cos \Lambda;$$

$$z'' = -G - 2y_0'\Omega \cos \Lambda.$$

Интегрированіе этихъ уравненій даетъ непосредственно:

$$x = x_0' t - y_0'\Omega \sin \Lambda t^2;$$

$$y = y_0' t - \frac{G}{3} t^3 \Omega \cos \Lambda + (x_0' \sin \Lambda + z_0' \cos \Lambda)\Omega t^2; \qquad (21)$$

$$z = z_0' t - \frac{G}{2} t^2 - y_0'\Omega \cos \Lambda t^2.$$

Какъ видимъ, ускореніе по вертикали

$$G + 2y_0'\Omega \cos \Lambda$$

зависитъ отъ начальныхъ условій.

Въ общемъ случаѣ траекторія кривая не плоская.

Когда точка падаетъ безъ начальной скорости: $x_0' = y_0' = z_0' = 0$, уравненія (21) даютъ:

$$x = 0;\ y = -\frac{G}{3}\Omega \cos \Lambda t^3;\ z = -\frac{Gt^2}{2}.$$

Траекторія лежитъ въ плоскости, перпендикулярной къ меридіану. Точка падаетъ не по вертикали, а даетъ уклоненіе къ востоку ($y < 0$).

Когда точка брошена вертикально кверху: $y_0' = x_0' = 0$, $z_0' = u_0 > 0$; изъ (21) имѣемъ:

$$x = 0;\ y = \left(u_0 - \frac{Gt}{3}\right)\Omega \cos \Lambda t^2;\ z = u_0 t - G\frac{t^2}{2}.$$

Движеніе въ плоскости, перпендикулярной къ меридіану. Точка останавливается въ моментъ $t_1 = \frac{u_0}{G}$ и тогда замѣчается уклоненіе къ западу: $y_1 = \frac{2}{3}\frac{u_0^3}{G^2}\Omega \cos \Lambda$. Точка снова падаетъ на горизонтальную плоскость $z = 0$ въ моментъ $t_2 = \frac{2u_0}{G}$ съ уклоненіемъ къ западу:

$$y_2 = 2y_1 = \frac{4}{3}\frac{u_0^3}{G^2}\Omega \cos \Lambda.$$

146. Маятникъ Фуко. Задача о маятникѣ Фуко въ первомъ приближеніи можетъ быть формулирована такъ: опредѣлить относительное движеніе тяжелой точки по сферѣ, неизмѣнно связанной съ вращающеюся землею. Беремъ оси тѣ же, что и въ предъидущемъ параграфѣ; пусть тогда уравненіе связи будетъ:

$$l^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0.$$

Пользуясь уравненіями (4), находимъ въ нашемъ случаѣ такія приближенныя уравненія относительнаго движенія:

$$\begin{aligned} x'' &= -2y'\Omega \sin \Lambda - 2\lambda x; \\ y'' &= 2x'\Omega \sin \Lambda + 2z'\Omega \cos \Lambda - 2\lambda y; \qquad (22) \\ z'' &= -G - 2y'\Omega \cos \Lambda - 2\lambda z. \end{aligned}$$

Степень точности у нихъ та же, что и для уравненій (20).

Если умножить уравненія (22) соотвѣтственно на x', y', z' и сложить, то получимъ

$$x'x'' + y'y'' + z'z'' = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u^2) = -Gz';$$

откуда, интегрируя:

$$u^2 = 2h - 2Gz, \tag{23}$$

гдѣ h произвольное постоянное.

Очевидно, равенство (23) представляетъ собою ничто иное, какъ интегралъ (7), въ которомъ по принятому нами въ § 145 условію опущенъ членъ, зависящій отъ Ω^2.

Умножая первое изъ уравненій (12) на y, а второе на x и вычитая, легко находимъ:

$$xy'' - yx'' = 2\Omega \sin \Lambda (xx' + yy') + 2\Omega \cos \Lambda xz'. \tag{24}$$

Вводимъ полярныя координаты, полагая

$$x = \rho \cos \psi;\ y = \rho \sin \psi;\ z = -\sqrt{l^2 - \rho^2}. \tag{25}$$

Допустимъ, что уклоненія маятника отъ вертикали настолько малы, что мы можемъ пренебречь высшими степенями радіуса-вектора ρ. Тогда изъ (25)

$$z = -(l^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}} = -l + \frac{1}{2l}\rho^2;\ z' = \frac{1}{l}\rho\rho'. \tag{26}$$

Подставляя изъ (25) и (26) въ интегралъ (23), получимъ:

$$\left(1 + \frac{1}{l^2}\rho^2\right)\rho'^2 + \rho^2\psi'^2 = 2h + 2G\left(l - \frac{1}{2l}\rho^2\right)$$

или, если пренебрежемъ $\frac{\rho^2}{l^2}$ передъ единицею:

$$\rho'^2 + \rho^2\psi'^2 = 2H - \frac{G}{l}\rho^2, \tag{27}$$

если

$$H = h + Gl.$$

Подобнымъ образомъ выраженіе (24) даетъ

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\psi') = 2\Omega \sin \Lambda \rho\rho' + 2\frac{\Omega}{l}\cos \Lambda \cos \psi \rho^2\rho'.$$

Отбрасывая послѣдній членъ, имѣемъ:

$$\frac{d}{dt}(\rho^2\psi') = 2\Omega \sin \Lambda \rho\rho',$$

откуда, интегрируя:

$$\rho^2\psi' = \Omega \sin \Lambda \rho^2 + C, \tag{28}$$

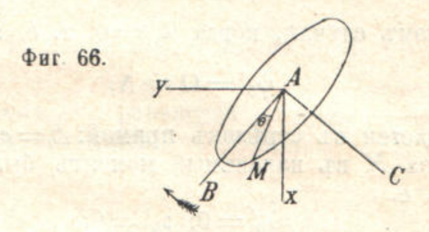
гдѣ C постоянная произвольная.

Отнесемъ движеніе точки M, проекціи тяжелой точки, на плоскость XOY, къ подвижнымъ осямъ CAB (Фиг. 66), вращающимся равномѣрно около A съ угловою скоростью $\Omega \sin \Lambda$ отъ юга къ западу; тогда

$$\angle BAX = \Omega \sin \Lambda . t + \Gamma,$$

гдѣ Γ нѣкоторая постоянная.

Фиг. 66.



Если уголъ MAB назовемъ θ, то, такъ какъ $\angle MAX = \psi$, имѣемъ:

$$\theta + \psi = \Omega \sin \Lambda . t + \Gamma. \tag{29}$$

Дифференцируя, найдемъ:

$$\theta' + \psi' = \Omega \sin \Lambda. \tag{30}$$

Подставляя отсюда въ (28), получимъ:

$$\rho^2\theta' = -C = C'; \tag{31}$$

C' новое обозначеніе постоянной произвольной.

Интегралъ живой силы (27) теперь приметъ видъ:

$$\rho'^2 + \rho^2(\theta'^2 - 2\Omega \sin \Lambda \theta' + \Omega^2 \sin^2 \Lambda) = 2H - \frac{G}{l}\rho^2$$

или, если воспользуемся равенствомъ (31):

$$\rho'^2 + \rho^2\theta'^2 = 2H_1 - k^2\rho^2, \tag{32}$$

гдѣ

$$H_1 = H + C'\Omega \sin\Lambda;\; k^2 = \frac{G}{l} + \Omega^2 \sin^2\Lambda.$$

Сравнивая интегралы (31) и (32) съ формулами (3) и (4) § 115, видимъ, что точка M на подвижной плоскости ACB описываетъ центральную орбиту, соотвѣтствующую силовой функціи

$$U = -k^2\rho^2.$$

По (23) § 111 эта точка находится подъ дѣйствіемъ силы притяженія къ центру A прямопропорціонально разстоянію. Мы знаемъ (§ 101), что орбитою будетъ эллипсъ съ центромъ въ точкѣ A. Произвольною постоянною Γ можно всегда распорядиться такъ, чтобы координатныя оси BAC совпали съ осями эллипса (Фиг. 66).

Въ частномъ случаѣ, когда $\theta_0' = 0$, т. е. по (20):

$$\psi_0' = \Omega \sin\Lambda,$$

эллипсъ обращается въ отрѣзокъ прямой: $\theta = const.$

Если точка M въ начальный моментъ была въ относительномъ покоѣ, т. е.

$$\psi_0' = 0;\; \rho_0' = 0;$$

тогда постоянныя интеграловъ (31) и (32) опредѣлятся такъ:

$$C' = \Omega \,.\, \sin\Lambda \,.\, \rho_0^2;\; 2H_1 = k^2\rho_0^2 + \rho_0^2\Omega^2 \sin^2\Lambda.$$

Интегралъ живой силы по исключеніи θ' легко приводится къ виду:

$$\rho^2\rho'^2 = k^2(\rho_0^2 - \rho^2)(\rho^2 - \rho_1^2),$$

если

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{\Omega \sin\Lambda}{k}.$$

Отсюда заключаемъ, что для разсматриваемаго случая maximum и minimum ρ или, что тоже, полуосями эллипса служатъ

$$\rho_0 \text{ и } \rho_0 \frac{\Omega \sin\Lambda}{k}.$$

ГЛАВА XIX.

Мгновенныя силы. Ударъ точки о связь.

147. Импульсъ силы. Возьмемъ дифференціальныя уравненія движенія матеріальной точки, находящейся подъ дѣйствіемъ силы $F(X, Y, Z)$:

$$mx'' = X; \; my'' = Y; \; mz'' = Z.$$

Проинтегрируемъ эти равенства по времени между предѣлами $t = t_0$ и $t = t$; тогда получимъ:

$$mx' - mx_0' = \int\limits_{t_0}^{t} Xdt;$$

$$my' - my_0' = \int\limits_{t_0}^{t} Ydt; \qquad (1)$$

$$mz' - mz_0' = \int\limits_{t_0}^{t} Zdt;$$

гдѣ x_0', y_0', z_0' скорости точки въ моментъ t_0.

Если движеніе точки m намъ дано, то X, Y, Z представляютъ собою извѣстныя функціи времени; тогда и опредѣленные интегралы, стоящіе въ правыхъ частяхъ равенствъ (1), могутъ быть найдены какъ функціи отъ времени. Векторъ J, координаты котораго равняются вышеупомянутымъ интеграламъ, носитъ названіе

импульса силы F за промежутокъ времени отъ момента t_0 до момента t. По сдѣланному опредѣленію:

$$J_x = J\cos(Jx) = \int_{t_0}^{t} X dt;$$

$$J_y = J\cos(Jy) = \int_{t_0}^{t} Y dt; \qquad (2)$$

$$J_z = J\cos(Jz) = \int_{t_0}^{t} Z dt.$$

Отсюда видимъ, что иначе мы могли бы опредѣлить импульсъ какъ векторъ-интегралъ по времени отъ вектора силы (§ 34).

Вообще говоря, направленіе импульса отлично отъ направленія силы; но, если сила постоянна по направленію, то направленія импульса и силы совпадаютъ. Дѣйствительно, пусть

$$X = F\alpha;\ Y = F\beta;\ Z = F\gamma;\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1;$$

α, β, γ постоянныя величины.

Тогда по (2):

$$J_x = J\cos(Jx) = \alpha \int_{t_0}^{t} F dt;$$

$$J_y = J\cos(Jy) = \beta \int_{t_0}^{t} F dt;$$

$$J_z = J\cos(Jz) = \gamma \int_{t_0}^{t} F dt;$$

Отсюда выводимъ:

$$J^2 = \left\{ \int_{t_0}^{t} F dt \right\}^2$$

и слѣд.

$$\cos(Jx) = \frac{J_x}{J} = \alpha = \cos(Fx);$$

$$\cos(Jy) = \frac{J_y}{J} = \beta = \cos(Fy);$$

$$\cos(Jz) = \frac{J_z}{J} = \gamma = \cos(Fz);$$

что и доказываетъ вышесказанное.

Каждую изъ координатъ импульса, напр. J_x, можемъ считать импульсомъ соотвѣтственной координаты силы, въ нашемъ случаѣ, силы X.

Если означимъ черезъ μ и μ_0 количества движенія точки m въ моменты t_0 и t (§ 86) и замѣтимъ, что

$$mx' = \mu\cos(\mu x);\ my' = \mu\cos(\mu y);\ mz' = \mu\cos(\mu z);$$

$$mx_0' = \mu_0\cos(\mu_0 x);\ my_0' = \mu_0\cos(\mu_0 y);\ mz_0' = \mu_0\cos(\mu_0 z);$$

то равенства (1) можемъ замѣнить такими:

$$\mu\cos(\mu x) - \mu_0\cos(\mu_0 x) = J\cos(Jx);$$

$$\mu\cos(\mu y) - \mu_0\cos(\mu_0 y) = J\cos(Jy);$$

$$\mu\cos(\mu z) - \mu_0\cos(\mu_0 z) = J\cos(Jz).$$

Отсюда вытекаетъ:

$$(\mu) - (\mu_0) = (J); \qquad (3)$$

т. е. геометрическое приращеніе количества движенія за промежутокъ времени отъ t_0 до t геометрически равняется импульсу силы за тотъ же промежутокъ времени.

148. Теорема лорда Кельвина. Составимъ выраженіе для работы силъ за нѣкоторый промежутокъ времени черезъ ея импульсъ. Съ этою цѣлью возьмемъ равенства (1), умножимъ ихъ соотвѣтственно на x', y', z' и сложимъ; тогда получимъ:

$$m(x'^2 + y'^2 + z'^2) - m(x'x_0' + y'y_0' + z'z_0') = J_x x' + J_y y' + J_z z'.$$

Если для момента t живую силу точки означимъ черезъ T, а скорость черезъ v, то предъидущему равенству можемъ дать видъ:

$$T - \frac{m}{2}(x'x_0' + y'y_0' + z'z_0') = \frac{1}{2} Jv \cos(Jv). \tag{4}$$

Умножая (1) на x_0', y_0', z_0' и складывая, найдемъ:

$$m(x'x_0' + y'y_0' + z'z_0') - m(x_0'^2 + y_0'^2 + z_0'^2) = J_x x_0' + J_y y_0' + J_z z_0'.$$

Если и здѣсь означимъ скорость точки и живую силу ея для момента t_0 черезъ v_0 и T_0, то можемъ написать:

$$\frac{m}{2}(x'x_0' + y'y_0' + z'z_0') - T_0 = \frac{1}{2} Jv_0 \cos(Jv_0). \tag{5}$$

Складывая (4) и (5), находимъ:

$$T - T_0 = \frac{J}{2}\left\{v \cos(Jv) + v_0 \cos(Jv_0)\right\}. \tag{6}$$

Такъ какъ по закону живой силы (§ 109) разность $T - T_0$ или приращеніе живой силы за промежутокъ времени отъ t_0 до t равняется работѣ равнодѣйствующей за то же время, то правая часть выраженія (6) и представляетъ собою искомое выраженіе этой работы черезъ соотвѣтственный импульсъ.

Равенство (6) было впервые получено лордомъ Кельвиномъ и словами можетъ быть выражено такъ: работа силы за какой либо промежутокъ времени равняется импульсу силы за тотъ же промежутокъ, умноженному на полусумму проекцій начальной и конечной скорости точки приложенія силы на направленіе импульса.

149. Мгновенныя силы. До сихъ поръ мы разсматривали лишь такія движенія, въ которыхъ скорость точки измѣняетъ свою величину и свое направленіе сплошнымъ образомъ. Но иногда приходится принимать въ разсчетъ и такія движенія, въ которыхъ скорость точки измѣняется скачкомъ. Для того, чтобы и подобныя движенія подвести подъ общую механическую схему, мы вводимъ понятіе о такъ называемыхъ мгновенныхъ силахъ.

Мгновенною называется сила, которая дѣйствуетъ въ теченіе безконечно малаго промежутка времени, но имѣетъ безконечно большое напряженіе, такъ что импульсъ ея за время дѣйствія оказывается величиною конечною.

Посмотримъ, какія слѣдствія вытекаютъ изъ сдѣланнаго опредѣленія.

Прежде всего замѣтимъ, что эффектъ дѣйствія мгновенной силы на матеріальную точку выразится въ мгновенномъ конечномъ измѣненіи скорости точки. Дѣйствительно по (1) и (2):

$$mx_1' - mx_0' = \int_{t_0}^{t_1} X\,dt = J_x;$$

$$my_1' - my_0' = \int_{t_0}^{t_1} Y\,dt = J_y; \qquad (7)$$

$$mz_1' - mz_0' = \int_{t_0}^{t_1} Z\,dt = J_z;$$

если мгновенная сила (X, Y, Z) начала дѣйствовать въ моментъ t_0, а кончила въ моментъ $t_1 = t_0 + \theta$, гдѣ θ безконечно малая; скорости со значкомъ 0 относятся къ моменту t_0, а со значкомъ 1 къ моменту t_1. Интегралы, стоящіе въ правыхъ частяхъ равенства (7), принимаютъ неопредѣленный видъ, такъ какъ подъинтегральная функція обращается въ безконечность, а предѣлы безконечно близки, но по сдѣланному нами условію они конечны, слѣд.

$$(mv_1) - (mv_0) = (J),$$

гдѣ J конечно, что и подтверждаетъ сказанное выше.

Однако, перемѣститься за время дѣйствія мгновенной силы точка не успѣетъ. Чтобы убѣдиться въ этомъ, возьмемъ уравненія (7) для верхняго предѣла t, если $t_0 < t < t_1$:

$$mx' - mx_0' = \int_{t_0}^{t} X\,dt = J_x';$$

$$my' - my_0' = \int_{t_0}^{t} Y\,dt = J_y';$$

$$mz' - mz_0' = \int_{t_0}^{t} Z\,dt = J_z';$$

здѣсь J' означаетъ импульсъ мгновенной силы за промежутокъ отъ t_0 до t. Интегрируя предъидущія равенства между предѣлами t_0 и $t_1 = t_0 + \theta$, получаемъ:

$$mx_1 - mx_0 - mx_0'\,\theta = \int_{t_0}^{t_0+\theta} J_x'\,dt;$$

$$my_1 - my_0 - my_0'\,\theta = \int_{t_0}^{t_0+\theta} J_y'\,dt;$$

$$mz_1 - mz_0 - mz_0'\,\theta = \int_{t_0}^{t+\theta} J_z'\,dt.$$

Разсмотримъ первый изъ интеграловъ, стоящихъ въ правыхъ частяхъ: $\int_{t_0}^{t_0+\theta} J_x'\,dt$. Мы можемъ по извѣстной теоремѣ интегральнаго исчисленія дать ему видъ:

$$\int_{t_0}^{t_0+\theta} J_x'dt = (\text{средн. знач. } J_x') \int_{t_0}^{t_0+\theta} dt = (\text{средн. знач. } J_x')\,\theta;$$

причемъ по условію среднее значеніе J_x' величина конечная. Тоже самое можемъ сказать и объ остальныхъ интегралахъ.

Полагая въ предѣлѣ θ равнымъ нулю, находимъ:

$$x_1 = x_0;\ y_1 = y_0;\ z_1 = z_0;$$

т. е. точка осталась на мѣстѣ.

Работа, совершенная мгновенною силою, имѣетъ конечную величину, какъ это вытекаетъ изъ теоремы лорда Кельвина (6) и сдѣланнаго нами условія о величинѣ импульса.

Если одновременно съ мгновенною силою приложена къ матеріальной точкѣ и сила конечнаго напряженія, то импульсъ послѣдней за время дѣйствія мгновенной будетъ безконечно малъ, и слѣд. въ предѣлѣ исчезаетъ. На самомъ дѣлѣ, пусть сила (Ξ, Υ, Z) конечна; тогда для импульса ея по оси OX имѣемъ выраженіе:

$$J_x = \int_t^{t_0+\theta} \Xi\, dt = (\text{средн. знач. } \Xi)\,.\,\theta,$$

что въ предѣлѣ обращается въ нуль. Сказанное справедливо и для импульсовъ по двумъ другимъ осямъ.

150. Ударъ матеріальной точки о связь. Положимъ, что матеріальная точка массы m подчинена неудерживающей связи:

$$F(x, y, z, t) \geqq 0. \tag{8}$$

Пусть связь эта ослаблена (§ 118):

$$F(x, y, z, t) > 0$$

и точка движется, какъ свободная, сообразно съ такими уравненіями движенія:

$$x = f_1(t);\ y = f_2(t);\ z = f_3(t). \tag{9}$$

Тогда можетъ случиться, что точка снова придетъ на связь, т. е. въ нѣкоторый моментъ τ координаты ея обратятъ лѣвую часть выраженія (8) въ нуль. Условимся, что за начало временъ взятъ нами какой либо моментъ изъ того промежутка времени, когда точка двигалась, какъ свободная; тогда моментъ τ прихода точки на связь, очевидно, найдется, если мы опредѣлимъ наименьшій положительный корень уравненія

$$F[f_1(t), f_2(t), f_3(t), t] = 0. \tag{10}$$

Если такого корня не окажется, то, значитъ, во все свое дальнѣйшее движеніе точка никогда не встрѣтится со связью.

Но пусть корень τ найденъ; тогда въ моментъ τ точка придетъ въ положеніе:

$$x_0 = f_1(\tau);\ y_0 = f_2(\tau);\ z_0 = f_3(\tau),$$

лежащее на связи (8), со скоростью $v_0\,(x_0',\ y_0',\ z_0')$, если

$$x_0' = v_0 \cos(v_0, x) = f_1'(\tau);\ y_0' = f_2'(\tau);\ z_0' = f_3'(\tau). \tag{11}$$

Но мы знаемъ (§ 121), что точка, находящаяся на неудерживающей связи (8), не можетъ имѣть произвольной скорости, а

должна подчиняться ограниченію, выражаемому равенствомъ (17) § 121:

$$\frac{dF}{dt} \geqq 0, \tag{12}$$

или

$$\frac{\partial F}{\partial x} x' + \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial z} z' + \frac{\partial F}{\partial t} \geqq 0. \tag{13}$$

Примѣняя это неравенство къ моменту τ, находимъ, что скорости x_0', y_0', z_0' должны выполнять условіе:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 x_0' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 y_0' + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 z_0' + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0 \geqq 0 \tag{14}$$

или, короче,

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_0 \geqq 0. \tag{15}$$

Значекъ 0 показываетъ, что въ соотвѣтственной функціи вмѣсто x, y, z, x', y', z', t вставлены $x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0', \tau$.

Когда скорость точки m въ моментъ τ такова, что лѣвая часть выраженія (15) положительна, тогда (§ 121) точка m въ одинъ изъ слѣдующихъ моментовъ, смежныхъ съ τ, снова покинетъ связь.

Когда скорость точки m въ моментъ τ такова, что лѣвая часть выраженія (15) обращается въ нуль, тогда въ зависимости отъ величины и направленія ускоренія точка m или остается на связи, или сходитъ съ нея.

Но, если скорость v_0 точки m такова, что

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_0 < 0, \tag{16}$$

то, чтобы согласить это неравенство съ условіемъ (12), мы принимаемъ, что связь (8) оказываетъ мгновенную реакцію на точку и эта реакція измѣняетъ скорость v_0 въ нѣкоторую другую $v_2(x_2', y_2', z_2')$, удовлетворяющую условію (12): происходитъ такъ называемый ударъ точки о связь. При томъ, чтобы подвести возможно большее число наблюдаемыхъ явленій подъ нашу схему, мы принимаемъ, что въ общемъ случаѣ скорость v_2 удовлетворяетъ условію (12) со знакомъ неравенства.

Если для момента τ точка покидаетъ связь, то мы должны изслѣдовать въ томъ же отношеніи слѣдующій по величинѣ поло-

жительный корень уравненія (10) и продолжать такимъ образомъ, пока не переберемъ всѣхъ корней или не дойдемъ до такого, при которомъ точка остается на связи или при которомъ происходитъ ударъ.

Итакъ, пусть для момента τ соблюдается неравенство (16). Такъ какъ мгновенная реакція связи отнесена нами къ разряду мгновенныхъ силъ, то по § 149 мы принимаемъ, что

I) время дѣйствія ея или продолжительность удара θ безконечно мала;

II) за время удара ни точка, ни поверхность (8) не успѣютъ измѣнить своего положенія;

III) за время удара импульсъ всякой конечной силы равенъ нулю.

Пусть ударъ кончается въ моментъ

$$\tau_2 = \tau + \theta;$$

тогда по условію въ общемъ случаѣ

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_2 > 0, \tag{17}$$

если

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 x_2' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 y_2' + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 z_2' + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0 \cdot \tag{18}$$

Всѣ коеффиціенты, какъ показываетъ значекъ 0, здѣсь постоянны.

Полагая, что во время удара скорость точки измѣняется сплошнымъ образомъ, мы изъ (16) и (17) заключаемъ, что для нѣкотораго промежуточнаго момента τ_1, т. е. если

$$\tau < \tau_1 < \tau_2 .$$

точка m пріобрѣтаетъ такую скорость $v_1(x_1', y_1', z_1')$, что для v_1 соблюдается равенство

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_1 = 0, \tag{19}$$

если

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_1 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 x_1' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 y_1' + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 z_1' + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0 \cdot \tag{20}$$

Промежутокъ времени отъ момента τ до τ_1 назовемъ первымъ актомъ удара, а промежутокъ отъ τ_1 до τ_2 вторымъ

актомъ. Въ частномъ случаѣ ударъ можетъ ограничиваться только однимъ первымъ актомъ (ударъ неупругій).

Скорость v_0, съ которою точка приходитъ на связь, обыкновенно называется скоростью паденія точки, а скорость v_2, съ которою точка покидаетъ связь, скоростью отраженія. Уголъ v_0 съ отрицательнымъ направленіемъ нормали къ поверхности (8) носитъ названіе угла паденія, а уголъ v_2 съ положительнымъ направленіемъ той же нормали носитъ названіе угла отраженія.

Мы принимаемъ, что и мгновенная реакція направлена по дифференціальному параметру перваго порядка или по положительной нормали къ поверхности (8), слѣд. косинусы угловъ ея съ осями пропорціональны

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0; \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0; \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0.$$

По условіямъ I и II эти величины во время удара постоянны, слѣд. по § 149 направленіе импульса совпадаетъ съ направленіемъ самой реакціи, т. е. идетъ также по положительной нормали.

Возьмемъ какой либо моментъ t между τ_1 и τ_2; пусть для него точка m имѣетъ скорость $v(x', y', z')$. Если импульсъ мгновенной реакціи за промежутокъ между моментами t_1 и t_2 условимся означить такъ

$$J_{t_1}^{t_2},$$

то по § 147 для момента t можемъ написать равенства:

$$mx' - mx_0' = J_\tau^t \frac{1}{\Delta F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0;$$

$$my' - my_0' = J_\tau^t \frac{1}{\Delta F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0; \qquad (21)$$

$$mz' - mz_0' = J_\tau^t \frac{1}{\Delta F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0;$$

если $\Delta F_0 = +\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0^2}$.

Въ этихъ уравненіяхъ мы приняли во вниманіе условіе III и пропустили поэтому импульсъ равнодѣйствующей конечныхъ

силъ, приложенныхъ къ точкѣ m. Изъ написанныхъ уравненій непосредственно вытекаетъ

$$\frac{x'-x_0'}{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0}=\frac{y'-y_0'}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0}=\frac{z'-z_0'}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0}; \tag{22}$$

т. е. приращеніе скорости точки за любой промежутокъ времени въ теченіе удара параллельно положительной нормали. Другими словами, если бы мы построили годографъ скорости за время удара, то получили бы отрѣзокъ прямой, параллельный нормали.

Положимъ для сокращенія, что

$$J_{\tau}^{\tau_1}=J_1;\ J_{\tau_1}^{\tau_2}=J_2;\ J_{\tau}^{\tau_2}=J_{\tau}^{\tau_1}+J_{\tau_1}^{\tau_2}=J_1+J_2=J;$$

тогда J_1 будетъ импульсъ реакціи за первый актъ удара, J_2 — за второй актъ удара, J — за весь ударъ.

Изъ уравненій (21) при $t=\tau_1$, получаемъ:

$$\begin{aligned} mx_1'-mx_0'&=J_1\frac{1}{\Delta F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0;\\ my_1'-my_0'&=J_1\frac{1}{\Delta F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0;\\ mz_1'-mz_0'&=J_1\frac{1}{\Delta F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0. \end{aligned} \tag{23}$$

Для $t=\tau_2$ изъ тѣхъ же уравненій имѣемъ:

$$\begin{aligned} mx_2'-mx_0'&=J\frac{1}{\Delta F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0;\\ my_2'-my_0'&=J\frac{1}{\Delta F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0;\\ mz_2'-mz_0'&=J\frac{1}{\Delta F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0. \end{aligned} \tag{24}$$

Наконецъ, вычитая равенства (23) изъ (24) находимъ:

$$mx_2'-mx_1'=J_2\frac{1}{\Delta F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0;$$

$$my_2' - my_1' = J_2 \frac{1}{\Delta F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0; \tag{25}$$

$$mz_2' - mz_1' = J_2 \frac{1}{\Delta F_0}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0.$$

Задача объ ударѣ состоитъ въ опредѣленіи скорости отраженія по даннымъ τ, x_0, y_0, z_0 и скорости паденія.

Разсмотримъ сначала частный случай, а именно допустимъ, что ударъ неупругій, т. е. ограничивается однимъ первымъ актомъ. Тогда искомою будетъ скорость v_1. Для нахожденія ея мы имѣемъ уравненія (23) и (19)—всего четыре уравненія для опредѣленія четырехъ неизвѣстныхъ x_1', y_1', z_1' и J_1. Чтобы найти импульсъ J_1, умножаемъ соотвѣтственно уравненія (23) на $\frac{1}{m}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0$, $\frac{1}{m}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0$, $\frac{1}{m}\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0$ и складываемъ; тогда находимъ:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 x_1' + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 y_1' + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 z_1' - \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 x_0' - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 y_0' -$$

$$-\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_0 z_0' = \frac{1}{m} J_1 \Delta F_0.$$

Прибавляя и вычитая изъ лѣвой части $\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0$, имѣемъ:

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_1 - \left(\frac{dF}{dt}\right)_0 = \frac{1}{m} J_1 \Delta F_0,$$

откуда по (19) для J_1 получаемъ выраженіе:

$$J_1 = -\frac{m}{\Delta F_0}\left(\frac{dF}{dt}\right)_0. \tag{26}$$

Подставляя это значеніе вмѣсто J_1 въ (23), непосредственно находимъ x_1', y_1', z_1', что и рѣшаетъ задачу.

Для рѣшенія общаго случая надо обратиться или къ уравненіямъ (24) или къ группѣ уравненій (23), (25) и (19). Въ томъ и другомъ случаѣ легко видѣть, что число неизвѣстныхъ на единицу превышаетъ число уравненій: въ первомъ случаѣ неизвѣстныхъ 4: x_2', y_2', z_2', J, а уравненій всего 3; во второмъ неизвѣстныхъ 8: x_1', y_1', z_1', x_2', y_2', z_2', J_1, J_2, а уравненій всего 7.

Если бы мы примѣнили къ опредѣленію J изъ (24) тотъ же пріемъ, который далъ намъ выраженіе для J_1, то нашли бы:

$$J = \frac{m}{\Delta F_0}\left\{\left(\frac{dF}{dt}\right)_2 - \left(\frac{dF}{dt}\right)_0\right\}, \tag{27}$$

гдѣ въ правую часть опять вошли бы неизвѣстныя x_2', y_2', z_2'. Вычитая (26) изъ (27) или непосредственно изъ уравненій (25), имѣемъ:

$$J_2 = \frac{m}{\Delta F_0}\left(\frac{dF}{dt}\right)_2. \tag{28}$$

Недостающее намъ восьмое уравненіе, связывающее неизвѣстныя, берется изъ опытовъ и наблюденій надъ тѣми явленіями, которыя желательно подвести подъ разбираемую механическую схему. А именно Ньютонъ, измѣряя углы паденія и отраженія соударяющихся тѣлъ, пришелъ къ такому опытному закону: отношеніе импульса за второй актъ удара къ импульсу за первый актъ удара не зависитъ отъ скорости паденія, а только отъ состава соударяющихся тѣлъ; это отношеніе ε, называемое **коэффиціентомъ возстановленія**, правильная положительная дробь:

$$0 \leq \varepsilon \leq 1.$$

Формулою положеніе Ньютона выразится такъ:

$$J_2 = \varepsilon J_1, \tag{29}$$

или по (26) и (28):

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_2 + \varepsilon\left(\frac{dF}{dt}\right)_0 = 0. \tag{30}$$

Чтобы дать себѣ отчетъ въ томъ, какимъ образомъ при помощи измѣренія угловъ паденія и отраженія можно найти отношеніе между J_2 и J_1, остановимся на простѣйшемъ случаѣ, съ которымъ собственно и производились опыты, а именно, когда связь неподвижна:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{31}$$

Изъ (26) и (28) имѣемъ

$$\frac{J_2}{J_1} = -\frac{\left(\frac{dF}{dt}\right)_2}{\left(\frac{dF}{dt}\right)_0}.$$

Такъ какъ

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_0 = \Delta F_0 \cos(\Delta F_0, x) = \Delta F_0 \cos(n, x); \ldots . ;$$

$$x_2' = v_2 \cos(v_2, x); \ x_0' = v_0 \cos(v_0, x); \ldots . ;$$

гдѣ n направленіе положительной нормали къ (8), то при (31) по (14) и (18):

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_2 = \Delta F_0 \,.\, v_2 \cos(v_2, n);$$

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_0 = \Delta F_0 \,.\, v_0 \cos(v_0, n);$$

и слѣдовательно

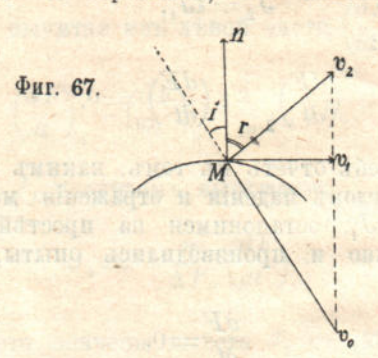
$$\frac{J_2}{J_1} = -\frac{v_2 \cos(v_2, n)}{v_0 \cos(v_0, n)}. \tag{32}$$

Кромѣ того по (19):

$$v_1 \cos(v_1, n) = 0. \tag{33}$$

Пусть (Фиг. 67) M точка поверхности, въ которой происходитъ ударъ; Mv_0—скорость паденія, Mv_2—скорость отраженія; углы i и r—углы паденія и отраженія; Mn—положительная нормаль.

Фиг. 67.



Тогда по (22) прямая v_0v_2, параллельная Mn, представитъ собою годографъ скорости за время удара, и слѣд. по (33) векторъ Mv_1 изображаетъ собою скорость v_1, если уголъ $n\ Mv_1$ прямой. Но

$$v_2 \cos(v_2, n) = v_1v_2 = Mv_1 \,.\, \operatorname{cotg} r = v_1 \,.\, \operatorname{cotg} r;$$

$$-v_0 \cos(v_0, n) = v_0v_1 = Mv_1 \,.\, \operatorname{cotg} i = v_1 \,.\, \operatorname{cotg} i;$$

а потому изъ (32):

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{cotg\, r}{cotg\, i};$$

т. е. отношенiе между импульсами равно отношенiю между котангенсами угловъ отраженiя и паденiя, что и желали показать.

Съ прибавленiемъ уравненiя (29) или (30) къ уравненiямъ (24) или къ группѣ уравненiй (23), (25) и (19) задача становится вполнѣ опредѣленною. Найдя импульсъ J_1 (26) указаннымъ выше прiемомъ, мы теперь по (29) имѣемъ:

$$J = J_1 (1 + \varepsilon),$$

и слѣд. скорость отраженiя найдется изъ уравненiй (24):

$$mx_2' - mx_0' = J_1 (1 + \varepsilon) \frac{1}{\Delta F_0} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)_0;$$

$$my_2' - my_0' = J_1 (1 + \varepsilon) \frac{1}{\Delta F_0} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)_0; \tag{34}$$

$$mz_2' - mz_0' = J_1 (1 + \varepsilon) \frac{1}{\Delta F_0} \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)_0;$$

гдѣ J_1 дается равенствомъ (26). Коеффицiентъ возстановленiя долженъ быть данъ намъ напередъ; если $\varepsilon = 0$, ударъ неупругiй и второго акта вовсе нѣтъ; если $\varepsilon = 1$, ударъ называется вполнѣ упругимъ.

Ньютонъ*) нашелъ, что при соударенiи стекла объ стекло $\varepsilon = \frac{15}{16}$, при соударенiи мячиковъ, набитыхъ шерстью, $\varepsilon = \frac{5}{9}$; при соударенiи желѣза объ желѣзо тоже почти $\frac{5}{9}$. Позднѣйшiе опыты подтвердили Ньютоновъ законъ (29).

Примѣръ: Точка массы $= 1$ движется согласно съ уравненiями

$$x = \alpha t;\ y = \beta t;\ z = \gamma t;$$

гдѣ α, β, γ постоянныя, и подчинена неудерживающей связи:

$$F = R^2 - (x - kt)^2 - y^2 - z^2 \geqq 0,$$

гдѣ R и k новыя постоянныя.

---

*) Thomson and Tait, Natural Philosophy sect. 300.

Для $t=0$ точка не на связи, моментъ τ прихода ея на связь найдемъ, рѣшая уравненіе:

$$R^2-[(\alpha-k)^2+\beta^2+\gamma^2]t^2=0,$$

слѣдовательно

$$\tau=\frac{R}{\delta},$$

гдѣ

$$\delta=+\sqrt{(\alpha-k)^2+\beta^2+\gamma^2}.$$

Въ этотъ моментъ точка займетъ положеніе:

$$x_0=\alpha\tau;\ y_0=\beta\tau;\ z_0=\gamma\tau;$$

а скорость паденія опредѣлится равенствами:

$$x_0'=\alpha;\ y_0'=\beta;\ z_0'=\gamma.$$

Дифференцируя уравненіе связи, находимъ, что

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_0=-2\delta^2\tau<0;$$

слѣд. произойдетъ ударъ.

Вычисляя ΔF_0, находимъ,

$$\Delta F_0=2\delta\tau;$$

поэтому импульсъ J_1 за первый разъ удара по (26) будетъ

$$J_1=\delta.$$

Если коеффиціентъ возстановленія ε, то по (34) скорость отраженія опредѣлится такъ:

$$x_2'=k-\varepsilon(\alpha-k);\ y_2'=-\varepsilon\beta;\ z_2'=-\varepsilon\gamma.$$

151. Измѣненіе живой силы матеріальной точки за время удара. Предварительно замѣтимъ, что по предъидущему съ одной стороны:

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_0 = \Delta F_0 v_0 \cos(v_0,n)+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0;$$

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_1=0=\Delta F_0 v_1 \cos(v_1,n)+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0;$$

$$\left(\frac{dF}{dt}\right)_2 = \Delta F_0 v_2 \cos(v_2,n)+\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0;$$

а съ другой стороны направленіе импульса совпадаетъ съ направленіемъ n. Примѣняемъ теперь теорему лорда Кельвина (§ 148) сначала къ промежутку времени между моментами τ и τ_1, а затѣмъ между моментами τ_1 и τ_2; причемъ живую силу точки для моментовъ τ, τ_1 и τ_2 означимъ соотвѣтственно T_0, T_1 и T_2. Тогда получимъ:

$$T_1 - T_0 = \frac{1}{2} J_1 [v_1 \cos(v_1, n) + v_0 \cos(v_0, n)] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{J_1}{\Delta F_0} \left\{ \left(\frac{dF}{dt}\right)_0 - 2\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0 \right\};$$

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2} J_2 [v_2 \cos(v_2, n) + v_1 \cos(v_1, n)] =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{J_2}{\Delta F_0} \left\{ \left(\frac{dF}{dt}\right)_2 - 2\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_0 \right\}.$$

Когда связь **неподвижна**, т. е.

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 0,$$

мы можемъ, пользуясь (26) и (28), переписать предъидущія равенства такъ:

$$T_1 - T_0 = -\frac{1}{2m} J_1^2; \quad T_2 - T_1 = \frac{1}{2m} J_2^2.$$

Отсюда заключаемъ, что тогда за **первый актъ** удара **живая сила** точки **уменьшается**, а за **второй актъ увеличивается**. Складывая полученныя выше выраженія, имѣемъ по (29)

$$T_2 - T_0 = -\frac{1}{2m} J_1^2 (1 - \varepsilon^2);$$

слѣд., за оба акта удара, вообще говоря, живая сила точки **уменьшается** и только при вполнѣ упругомъ ударѣ ($\varepsilon = 1$) остается безъ **перемѣны**.

...числить силовую функцию для оттал...

полюсами прямо пропорц. разстоян...

...ного линия

v_0 ... ось

M_0

$t=0$

...обрать такъ v_0 чтобы точка

...мптотически приближалась къ ц...

z, ξ, ρ, $m(xyz)$, x, C

$$x = f\cos(fx) = k^2 m\rho\cos(...$$

$$y = k^2 my$$

$$z = k^2 mz$$

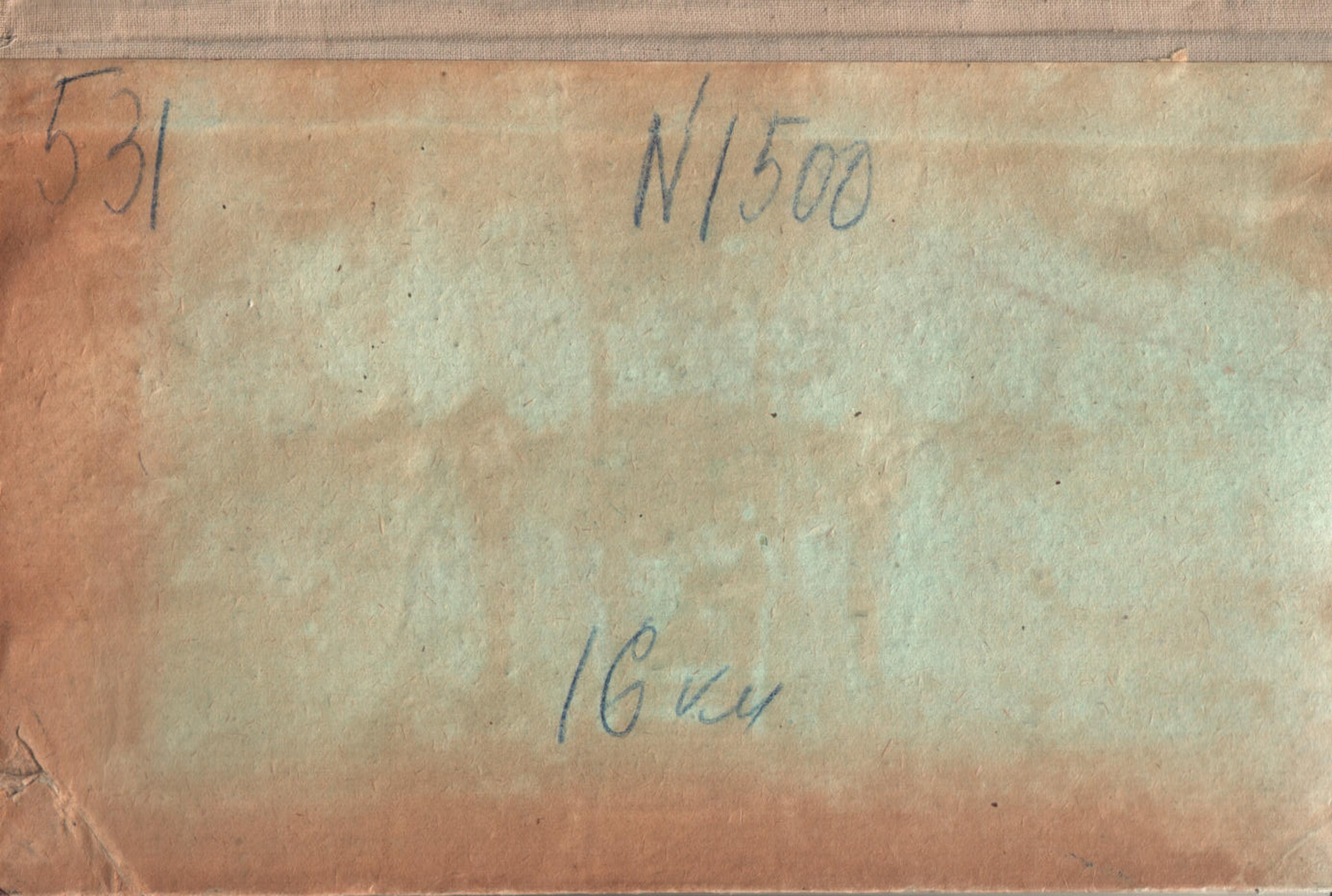
$$Xdx + Ydy + Zdz = dU$$

$$k^2 m(xdx + ydy + zdz) = d\left[\frac{k^2 m}{2}(x^2 + y^2 + z^2)\right]$$

$$\frac{v^2}{2} = \frac{1}{2}k^2 m x^2 + h \qquad \text{при } x = X_0$$

при $x = 0$ $v = ...$

$$... \frac{dx}{dt} \qquad x = f(t) \qquad \text{отсюда } v_0 = ...$$



531
N 1500
16 кн